

## Beispiel 2: Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

### 1. Teil: Ionisationsgleichgewicht von Helium

#### **Aufgabenstellung**

Es musste die Dichteverteilung eines Sterns unter bestimmten Bedingungen bestimmen, in dem wir numerisch Differentialgleichungen für dieses System lösen. Das Ergebnis war dann mit der analytischen Lösung zu vergleichen.

#### **Physikalische Bedeutung**

Damit ein Stern stabil existieren kann, müssen sich die Gravitationskraft und der Druck (Strahlung, Entartung, ...) die Waage halten. Aus dieser Überlegung folgt die Formel für das hydrostatische Gleichgewicht:

$$(1) \frac{dp}{dr} = -\frac{G \cdot m(r)}{r^2} \rho(r)$$

Weiters erhält man unter Annahme einer radialsymmetrischen Massenverteilung die so genannte Massengleichung:

$$(2) \frac{dm}{dr} = 4\pi \cdot \rho(r) \cdot r^2$$

Darüber hinaus benötigen wir noch eine dritte Gleichung, welche uns den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte angibt; die polytrope Zustandsgleichung:

$$(3) p = p(0) \left( \frac{\rho}{\rho(0)} \right)^\gamma$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich ein System von 2 gekoppelten Differentialgleichungen bilden, welches zumindest numerisch lösbar ist. Um dies zu erreichen führen wir nun dimensionslose Größe ein:  $\bar{r} = r/R_d$ ,  $\bar{m} = m/M_d$ ,  $\bar{\rho} = \rho/\rho(0)$ . So erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\frac{dp}{d\bar{r}} = -\frac{G \cdot \bar{m} \cdot M_d}{\bar{r}^2 \cdot R_d} \bar{\rho}(r) \cdot \rho(0)$$

$$\frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} = 4\pi \cdot \bar{\rho}(r) \cdot \bar{r}^2 \frac{\rho(0) \cdot R_d^3}{M_d}$$

$$p = p(0) \bar{\rho}^\gamma$$

Durch Ableiten erhalten wir nun:

$$dp = p(0) \cdot \gamma \cdot \bar{\rho}^{\gamma-1} \cdot d\bar{\rho}$$

Durch Einsetzen und Ordnen der Faktoren bekommen wir:

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} = -\frac{G \cdot \rho(0) \cdot M_d \cdot \bar{m} \cdot \bar{\rho}^{(2-\gamma)}}{p(0) \cdot \gamma \cdot R_d \cdot \bar{r}^2}$$

$$\frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} = \frac{4\pi \cdot R_d^3 \cdot \rho(0) \cdot \bar{r}^2 \cdot \bar{\rho}}{M_d}$$

Die Konstanten können nun zusammengefasst werden und wir erhalten unsere Gleichungssystem:

$$(4) \quad \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} = -A \frac{\bar{m} \cdot \bar{\rho}^{(2-\gamma)}}{\bar{r}^2} \quad \text{mit} \quad A = \frac{G \cdot \rho(0) \cdot M_d}{p(0) \cdot \gamma \cdot R_d}$$

$$(5) \quad \frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} = B \cdot \bar{r}^2 \cdot \bar{\rho} \quad \text{mit} \quad B = 4\pi \frac{R_d^3 \cdot \rho(0)}{M_d}$$

Die Konstanten A und B werden für unsere weiteren Berechnungen gleich 1 gesetzt. Für fast alle Fälle von  $\gamma$  ist dieses Gleichungssystem nicht analytisch lösbar, jedoch existiert zu dem von uns zu betrachtenden Fall von  $\gamma=2$  eine analytisch Lösung, auch wenn diese keine physikalische Bedeutung hat. Man kann dieses Gleichungssystem in dem man es auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung zurückführt lösen. Gleichung 4 kann man folgender Maßen umschreiben:

$$-\bar{r}^2 \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} = \bar{m}$$

Dies differenzieren wir nun nach dem Radius:

$$\frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} = -2\bar{r} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} - \bar{r}^2 \frac{d^2\bar{\rho}}{d\bar{r}^2}$$

Diese Gleichung können wir nun in Formel 5 einsetzen und ein r kürzen:

$$\bar{r} \bar{\rho} + 2 \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} + \bar{r} \frac{d^2\bar{\rho}}{d\bar{r}^2} = 0$$

Nun können wir eine Substitution wählen(educated guess), welches uns die Differentialgleichung deutlich vereinfacht. Dazu definieren wir uns eine neue Größe x:

$$x = \bar{r} \cdot \bar{\rho} \quad \Rightarrow \quad \bar{\rho} = \frac{x}{\bar{r}}$$

Angesichts dieser Definition bilden wir nun die erste und zweite Ableitung der Dichte nach dem Radius:

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{dx}{d\bar{r}} - \frac{x}{\bar{r}^2}$$

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{d\bar{r}^2} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{d^2x}{d\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{dx}{d\bar{r}} + \frac{x}{\bar{r}^3}$$

Setzen wir unsere Substitution in die Differentialgleichung 2. Ordnung ein und erhalten:

$$x + \frac{d^2x}{d\bar{r}^2} = 0$$

Für diese homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann man nun einen e-Ansatz machen und erhält als allgemeine Lösung:

$$x = a_1 \cdot e^{i\bar{r}} + a_2 \cdot e^{-i\bar{r}}$$

$$\bar{\rho} = \frac{a_1 \cdot e^{i\bar{r}} + a_2 \cdot e^{-i\bar{r}}}{\bar{r}}$$

Jetzt müssen wir nur noch die Anfangsbedingungen verwenden:

$$\bar{\rho}(\bar{r} = 0) = 1 \quad \bar{m}(\bar{r} = 0) = 0$$

Mit der ersten Anfangsbedingung erhalten wir unter Verwendung des Satzes von l'Hôpital folgende Gleichung für die Konstanten:

$$1 = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \frac{a_1 \cdot e^{i\bar{r}} + a_2 \cdot e^{-i\bar{r}}}{\bar{r}} = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \frac{i \cdot (a_1 \cdot e^{i\bar{r}} - a_2 \cdot e^{-i\bar{r}})}{1} = i \cdot (a_1 - a_2)$$

Aus der zweiten Anfangsbedingung können wir folgende Relation für die Konstanten ermitteln:

$$\bar{r}^2 \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} = \bar{m} \quad \Rightarrow \quad 0 = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \bar{r}^2 \left( i \frac{a_1 \cdot e^{i\bar{r}} - a_2 \cdot e^{-i\bar{r}}}{\bar{r}} - \frac{a_1 \cdot e^{i\bar{r}} + a_2 \cdot e^{-i\bar{r}}}{\bar{r}^2} \right) =$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \left( i \cdot \bar{r} \cdot a_1 \cdot e^{i\bar{r}} - i \cdot \bar{r} \cdot a_2 \cdot e^{-i\bar{r}} - a_1 \cdot e^{i\bar{r}} - a_2 \cdot e^{-i\bar{r}} \right) = -a_1 - a_2 = 0$$

Nun setzen wir die erhaltenen Bedingungen in die allgemeine Lösung ein:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2i} \frac{e^{i\bar{r}} - e^{-i\bar{r}}}{\bar{r}}$$

Mit Hilfe der komplexen Definition des Sinus kann man dieses Ergebnis noch ein wenig vereinfachen und man bekommt die Lösung:

$$(6) \quad \bar{\rho} = \frac{\sin(\bar{r})}{\bar{r}}$$

## Numerisches Verfahren

Es existieren zahlreiche Verfahren um Differentialgleichungen numerisch zu lösen. Für eine Differentialgleichung erster Ordnung der Gestalt:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

und gegebene Anfangsbedingungen kann man zum Beispiel mit dem Runge-Kutta-Verfahren anwenden. Dies hat die allgemeine Form:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^N \alpha_i \kappa_i$$

$$\kappa_1 = f(x_n, y_n)$$

$$\kappa_i = f(x_n + h \cdot \lambda_i, y_n + h \cdot \mu_i \cdot \kappa_{i-1}) \quad i = 2, \dots, N$$

Der Parameter  $h$  ist die Schrittweite, und die Konstanten  $\alpha_i$ ,  $\lambda_i$  und  $\mu_i$  können mittels einer Taylor-Entwicklung und Vergleich bestimmt werden. Oft reicht es aus dass Runge-Kutta-Verfahren bis zur 4. Ordnung zu verwenden, somit bekommt man folgende Formeln:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\kappa_1}{6} + \frac{\kappa_2}{3} + \frac{\kappa_3}{3} + \frac{\kappa_4}{6}$$

$$\kappa_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$\kappa_2 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + \kappa_1/2)$$

$$\kappa_3 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + \kappa_2/2)$$

$$\kappa_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + \kappa_3)$$

Dieses Verfahren kann man auch auf gekoppelte Differentialgleichungssysteme erweitern, wie wir es in dem von uns betrachteten Fall zu tun haben. Bei der Anschätzung einer vernünftigen Schrittweite sind primär zwei Faktoren zu berücksichtigen. Einerseits entspricht eine kleinere Schrittweite einer höheren Genauigkeit (bis zu einer gewissen Grenze, wo dann die Gleichung (numerisch) instabil werden kann), doch dafür nimmt auch die Rechenzeit entsprechend zu. Wählt man aber andererseits die Schrittweite zu groß, kann man aber wichtige Eigenschaften der Lösungsfunktion „übersehen“, jedoch geht die Berechnung sehr schnell. Es geht darum stets ein Optimum zu finden.

## Durchführung

Gemäß dem beigelegten Schema programmierten wir einen Algorithmus für das Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung für ein System aus 2 Differentialgleichungen erster Ordnung. Dies vereinfachte sich ein wenig, da in dem von uns betrachteten Spezialfall ( $\gamma=2$ ), die rechte Seite beider Gleichungen (Formeln 4 und 5) jeweils nur von 2 Parametern abhing. Für diese Seite wurden 2 Funktionen programmiert und ein Modul ausgelagert, welches dann im Hauptprogramm aufgerufen wird. In der Funktion, welche die Formel 4 behandelt, würde bei

der numerischen Berechnung ein Fehler bei dem Radius 0(Startwert!) auftreten, da wir uns hier eine Division durch 0 einhandeln. Dies kann man jedoch umgehen indem man eine if-Abfrage für den soeben beschriebenen Fall einbaut. Man sieht sehr leicht, dass die Ableitung der Dichte nach dem Radius im Zentrum 0 sein muss, wenn man das Gleichungssystem mit einer leichten Störung ansetzt und dann linearisiert und die Anfangswerte(welche genau bei Radius 0 gegeben sind) einsetzt. Nach dem Programmstart kann man die Schrittweite für die numerische Berechnung eingeben. Dabei handelt es sich um den Wert um den der Radius pro Schleifendurchlauf erhöht wird. Wir wählten für unsere Berechnungen eine Schrittweite von 1/1000, später aber auch andere Schrittweiten um die relativen Fehler zu vergleichen. Für den schrittweisen Durchlauf der Lösung wurde ein „repeat until“ – Schleife verwendet, deren Abbruchbedingung das Erreichen einer Dichte von Null ist. Weiters wird in dieser Schleife auch der exakte Wert für die Dichte bei jeweiligem Radius gemäß der analytischen Lösung der Differentialgleichung ermittelt. Die Ausgabe erfolgt in 3 Dateien. In die erste Datei werden bei jedem Schleifendurchlauf die numerischen Werte für den aktuellen Radius, die Dichte und die eingeschlossene Masse ausgegeben. In eine zweite Datei schreibt das Programm die analytischen Werte für Radius und Dichte. In die dritte Datei wird der berechnete relative Fehler der Dichtebestimmung(durch Vergleich der numerischen mit der analytischen Lösung(siehe Gleichung 6)) ausgegeben.

## **Auswertung**

Wie man schon am analytischen Ergebnis leicht sieht, hat unser Stern einen Radius von  $\pi$  in den gewählten dimensionslosen Größen. Daher normierten wir in der weiteren Auswertung den Radius auf 1 um von Sternradien sprechen zu können. Auf Grund der Wahl unserer Anfangswerte ist die Dichte in Zentraldichten angegeben. Jedoch muss die eingeschlossene Masse auch normiert werden, da Gesamtmasse des Sterns in den Einheiten, welche wir für die numerische Berechnung verwendeten haben  $\pi$  ergibt. Die eingeschlossene Masse nimmt selbstverständlich mit zunehmendem Radius zu, was in Abbildung 1 zu sehen ist. Die Dichte des Sterns nimmt wie zu erwarten war radial ab. Nach dem inneren Drittel des Sterns ist der Verlauf sogar fast linear(siehe Abb.2). Das numerische Ergebnis stimmt dem analytischen(Abb.3) auf dem ersten Blick relativ gut überein. Eine qualitativere Auswertung ist in Abbildung 4 zu sehen. Das grundsätzliche Verhalten des relativen Fehlers ist unabhängig von der gewählten Schrittweite dasselbe. Jedoch nimmt der relative Fehler mit kleiner Schrittweite deutlich ab. Bei den von uns gewählten Schritten gelangten wir noch nicht in einen Bereich in dem das Verfahren instabil wird. Über weite Teile des Sterns ist der relative praktisch konstant, was etwas verwunderlich erscheint, da man ja aufgrund einer steten Fehlerfortpflanzung eine Zunahme erwarteten würde. Scheinbar heben sich die numerischen Abweichungen im jeweils nächsten Rechenschritt immer wieder größtenteils weg. Am Rand und im Zentrum ist der relative Fehler sogar etwas kleiner als sein durchschnittlicher Wert über den gesamten Stern. Offensichtlich konvergiert in diesen Bereichen das Verfahren bei dem gegebenen Gleichungssystem besonders gut. Es ist hier noch anzumerken, dass die Schrittweiten in Abbildung 4 nicht in stellaren Einheiten, sondern in denen der numerischen Berechnung, angegeben sind.

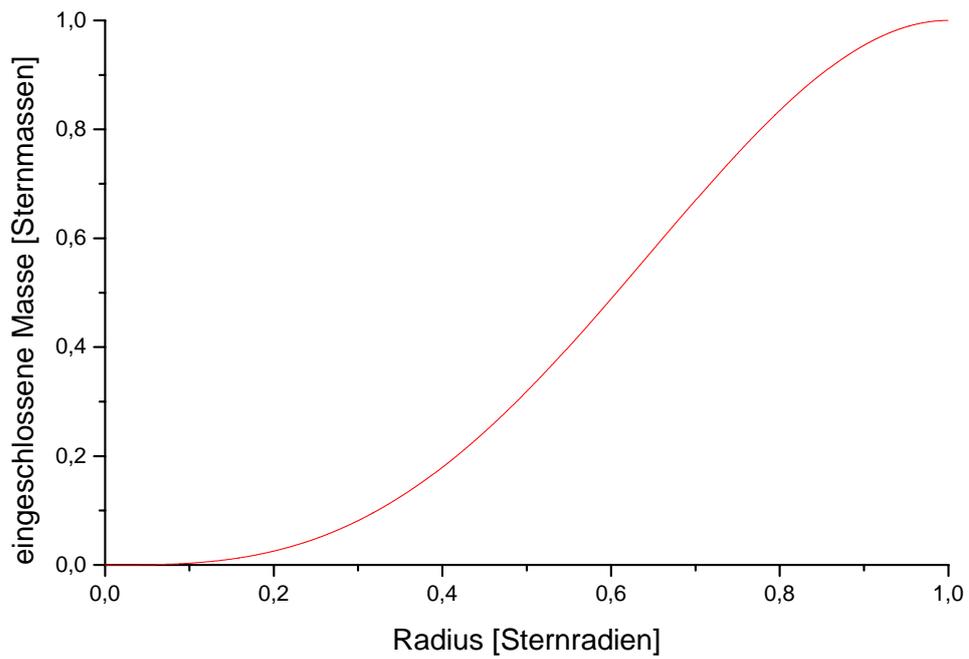


Abb.1: auf stellare Einheiten normierte in einem gewissen Radius eingeschlossene Masse gemäß numerischer Berechnung

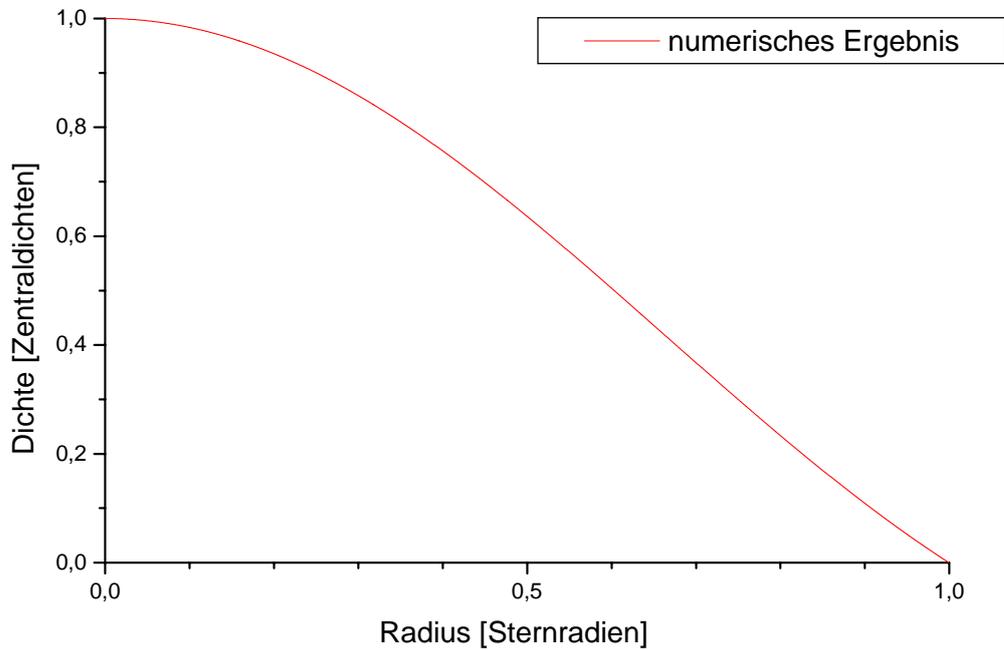


Abb.2: radialer Verlauf der Dichte(normiert auf die Dichte im Zentrum) gemäß numerischer Berechnung

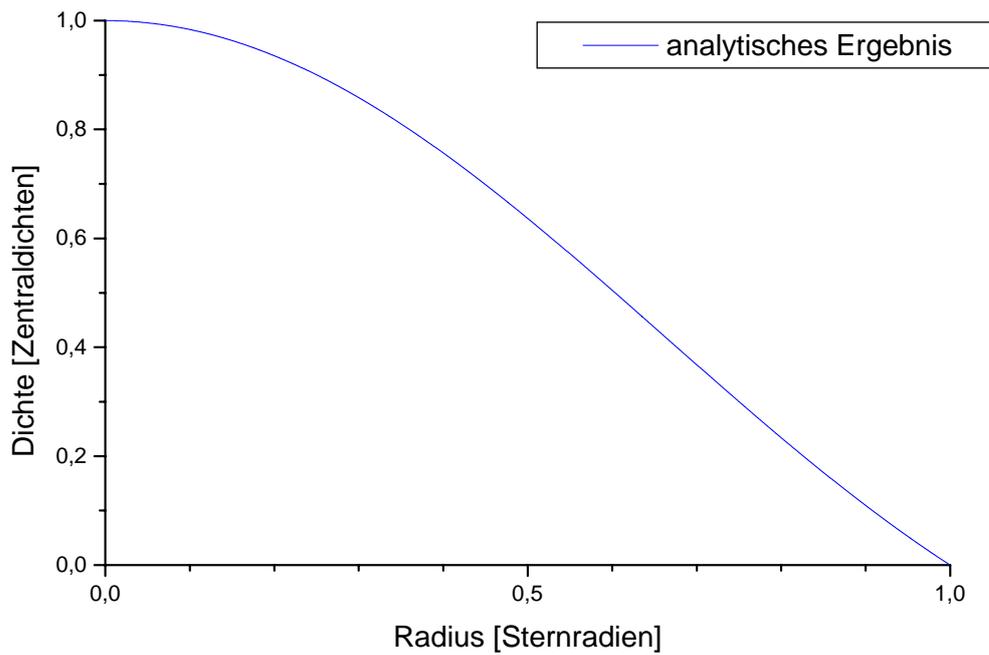


Abb.3: radialer Verlauf der Dichte(normiert auf die Dichte im Zentrum) gemäß analytischer Berechnung

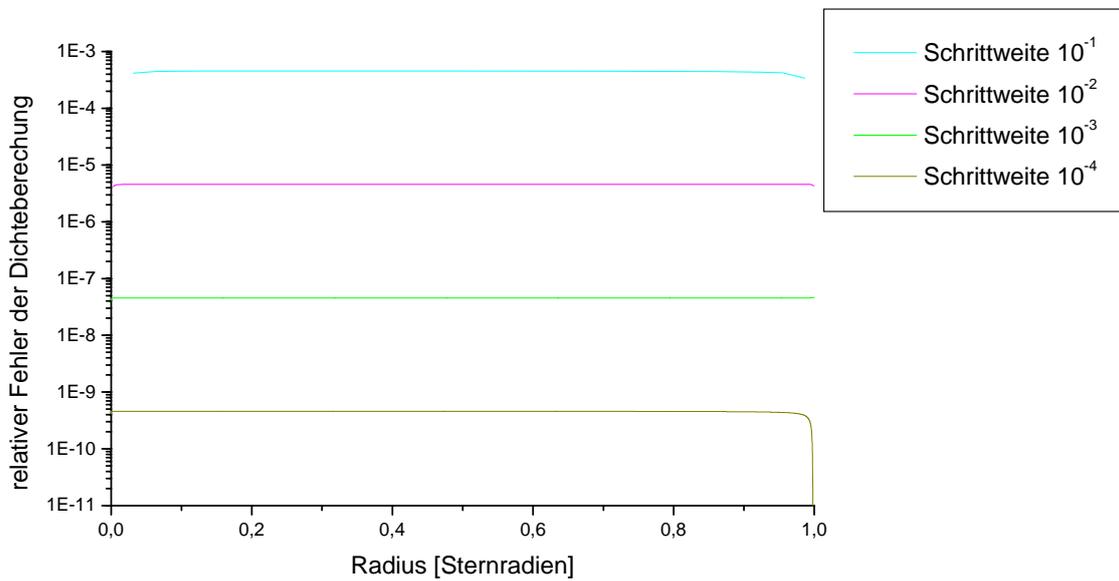


Abb.4: der relative Fehler der Dichteberechnung in Abhängigkeit des Radius berechnet durch den Vergleich des numerischen und analytischen Ergebnisses für verschiedene Schrittweiten