Lie-Integration

$$\frac{dz_i}{dt} = \theta_i(z)$$

Lie-Operator: $D = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{\partial}{\partial z_i}$

Anfangsbedingung: $z_i(0) = \xi_i$

Lösung einer DGL: $z_i = e^{tD}\xi_i = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n)\xi_i$

Methode der kleinsten Quadrate

geg.: Wertetabelle mit (x_i, y_i) und Funktion mit der man approximiert: z.B.: $y=Ax^2+Bx+c$

Berechne für jedes Wertepaar die Koeffizienten von A, B und C und der anderen Seite:

Also hier: y, x^2, x und 1

Dann die jeweiligen Werte in allen Kombination miteinander multiplizieren, und dann die Ergebnisse der jeweils gleichen Multiplikation für allen Wertepaare aufsummieren. Aus den Ergebnissen folgendes Gleichungssystem erstellen und nach A, B und C lösen.

$$\begin{pmatrix} [x^2, x^2] & [x^2, x] & [x^2, 1] \\ [x^2, x] & [x, x] & [x, 1] \\ [x^2, 1] & [x, 1] & [1, 1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [y, x^2] \\ [y, x] \\ [y, 1] \end{pmatrix}$$

$$Def.: [a, b] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

LU-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & v_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & v_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & v_n \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_n = a_n$$
$$\beta_1 = b_1$$
$$v_n = \frac{c_{n-1}}{b_{n-1}}$$
$$\beta_n = b_n - \alpha_n v_n$$

➔

$$y_1 = \frac{d_1}{\beta_1}$$
$$y_n = \frac{d_n - y_{n-1}\alpha_n}{\beta_n}$$

➔

$$x_n = y_n$$
$$x_{n-1} = y_{n-1} - v_n x_n$$

Cramersche Regel

$$A.\vec{x} = \vec{b}$$

$$x_i = \frac{\det(C_i)}{\det(A)}$$

wobei $Ci = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(i-1)} & b_{n-1} & a_{(n-1)(i+1)} & \dots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Kubische Splines

$$f_k(x) = A_k(x-x_k)^3 + Bk(x-x_k)^2 + C_k(x-x_k) + D_k$$

$$A_k = \frac{1}{6\Delta x_k}(y_{k+1}'' - y_k'')$$

$$B_k = \frac{1}{2} y_k''$$

$$C_k = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} - \frac{1}{6}\Delta x_k (y_{k+1}'' + 2y_k'')$$

$$D_k = y_k$$

Mit Randbedingungen y_1“ und y_n“:

$$\begin{pmatrix} 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_2 + \Delta x_3) & \Delta x_3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta x_3 & 2(\Delta x_3 + \Delta x_4) & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \Delta x_{n-2} \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & \Delta x_{n-2} & 2(\Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ \ldots \\ \ldots \\ y_{n-1}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right) - \Delta x_1 y_1'' \\ 6\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} - \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right) \\ 6\left(\frac{\Delta y_4}{\Delta x_4} - \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}\right) \\ \ldots \\ \ldots \\ 6\left(\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} - \frac{\Delta y_{n-2}}{\Delta x_{n-2}}\right) - \Delta x_{n-1} y_n'' \end{pmatrix}$$

Mit Randbedingungen y_1’ und y_n’:

$$\begin{pmatrix} 2\Delta x_1 & \Delta x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \Delta x_1 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta x_2 & 2(\Delta x_2 + \Delta x_3) & \Delta x_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x_2 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \Delta x_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Delta x_{n-3} & 2(\Delta x_{n-3} + \Delta x_{n-2}) & \Delta x_{n-2} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \Delta x_{n-2} & 2(\Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1}) & \Delta x_{n-1} \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_{n-1} & 2\Delta x_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ y_{n-1}'' \\ y_n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - y_1'\right) \\ 6\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right) \\ 6\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} - \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right) \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ 6\left(\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} - \frac{\Delta y_{n-2}}{\Delta x_{n-2}}\right) \\ 6\left(y_n' - \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}\right) \end{pmatrix}$$

Legendre Polynome

Bildungsgesetze

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x \pm \cos(\varphi)\sqrt{x^2-1})^n \, d\varphi$$

Ableitung

$$(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx} = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x))$$

Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \text{ für } m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

Beispiele

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

Differentialgleichung lösen

Lösung: $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$

$$\Big(\sum_{k=0}^{4} ak[DGL(y(P_k(x)) = 0]\Big) * P_j(x) = 0 \quad \text{, wobei j=0, 1, … , k}$$

Orthogonalität ausnützen und entstehendes Gleichungssystem lösen

Tschebyscheff Polynome

Bildungsgesetze

$$T_n(x) = \cos(n * \arccos(x))$$

$$T_n(\cos(\varphi)) = \cos(n\varphi)$$

$$T_n = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Beispiele

$$T_0 = 1$$
$$T_1 = x$$
$$T_2 = 2x^2 - 1$$
$$T_3 = 4x^3 - 3x$$
$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Orthogonalität

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m T_n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 : m \neq n \\ \frac{\pi}{2} : m = n \neq 0 \\ \pi : m = n = 0 \end{cases}$$

Integral

$$2\int T_n(x)dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} + const$$

Padé-Approximation

Funktion in Taylorreihe: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

wobei $b_0=1$ (Definition)

$\sum_{j=0}^{n} b_j c_{m-j+k} = 0$ für k=1,…n

$\sum_{j=0}^{m} b_j c_{k-j} = a_k$ für k=0,…m

Koeffizientenvergleich:

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$