Exakte DGL
Typ: Q(x,y) y' + P(x,y) =0

exakt wenn: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

sonst IF: $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{d \ln(g)}{dx}$

Löse: $f(x, y) = \int^{y} Q(x, y)\, dy + k(x)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int^{y} Q(x, y)\, dy\right) + k'(x) = P(x, y)$

k(x) durch integrieren

Typ: y' + r(x) * y = s(x)

Lösung: $c = y * e^{\int^{x} r(z)\, dz} - \int^{x} s(z)\, e^{\int^{z} r(\xi)\, d\xi}\, dz$

$e^{\lambda * x}$-Ansatz: Typ:
a y'' + b y' + c y = 0
Lösung a*λ² + b*λ + c = 0
falls $\lambda_1 = \lambda_2$ ➔ $y_H = (A + B\ x)\ e^{\lambda x}$

D-Operator
Störfunktion Typ A $e^{\mu x}$

Lösung: $y = \frac{1}{L(\mu)} A e^{\mu x}$

falls L(μ) = 0 ➔ $L(D) = \frac{\Lambda(D)}{(D - \mu)^m}$ wobei L(μ)≠0

$y = A\ \frac{x^m}{m!}\ \frac{e^{\mu x}}{\Lambda(\mu)}$

Typ: c y'' + b y' + a y = cos(p x)

Lösung: $y = \frac{(-cp^2 + a - bD)}{(a - cp^2)^2 + b^2p^2} \cos(px)$

geht gleich mit Sinus, Herleitung der Formel durch –p²=D² und dann erweitern mit konjugierten

Variation der Parameter
$f_2(x)$ y+ $f_1(x)$ y' + $f_0(x)$ y= f(x)
$y_H = a\ u_1(x) + b\ u_2(x)$
Lösung:

$A' = \frac{u_2 f(x)}{f_2(x)\ (u_2 u_1' - u_1 u_2')}$

$B' = -\frac{u_1 f(x)}{f_2(x)\ (u_2 u_1' - u_1 u_2')}$

➔ $\int^{x}$ ➔ A und B (wobei Konstante egal)

$y_A = a^* u_1 + b * u_2 + A(x) * u_1 + B(x) * u_2$

Laplace-Transformation

L(f) = F(s) = $\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$

$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$

z.B.: L(f'') = - f'(0) – s f(0) + s² L(f)
falls bei $x=x_0$ unstetig ➔
$L(f') = s L(f) - f(0) - [f(x_{0+}) - f(x_{0-})]\ e^{-s x_0}$
Typ: a y'' + b y' + c y = f
Lösung:
a [s² y(s) – s y(0) – y'(0)] + b [s y(s) – y(0)] + c y(s) = L(f)

Bernoulli'sche DGL
Typ: y' + r(x) y = s(x) y^n
Lösung: v(x) = $y(x)^{1-n}$

$\frac{v'}{1-n} + r(x)\, v = s(x)$

Cauchy-Riemann'sche DGL
f(z) = u + i v

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

wenn erfüllt in z_0 und Umgebung ➔ f(z) dort analytisch

Chauchy'scher Integralsatz

$\int_a^a f(z)\, dz = 0$

wenn keine Singularität gegeben
Anmerkung: wesentliche Singularität(schlimm!): Laurent-Reihe hat ∞-viele negative Glieder

Residuensatz

$\int f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z), z_j)$

$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right]$

inverse Laplace-Transformation

$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int F(s)\, e^{sx}\, ds$

linear unabhängig

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$

Vektoranalysis

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$

c² = a² + b² + 2 a b cos(γ)

$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}$

$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ijl} = 2\, \delta_{kl}$

$\vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ |\vec{c}| \cos(\alpha) \sin(\theta) = V$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin(\alpha) = A$

es existiert A^{-1} wenn det(A) ≠ 0

$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)}$ $\quad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$

$y_i = a_{ij}\, x_j$; $y_i\, a_{ik} = x_k$; $a_{ij}\, a_{ik} = \delta_{kj}$

$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \to \frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b}\, \frac{d\vec{a}}{dt}$

$\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}$

$\frac{d}{dt}\left(\Phi\, \vec{a}\right) = \Phi\, \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}\, \vec{a}$

$\vec{r}(t) = v\, t\, (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3)$

dann $a_i = \cos(\varphi_i)$ Richtungskosinus
Bogenlänge:

$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right| d\tau = \int_0^t \sqrt{\frac{dx_i}{d\tau}\, \frac{dx_i}{d\tau}}\, d\tau$

➔ s(t) ➔ t(s) ➔ r(t(s)) ➔ $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ (Tangenteneinheitsvektor)

Krümmung : $\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right|$

Krümmungsradius ρ(s) = $k(s)^{-1}$

Hauptnormalenvektor $\vec{n} = \frac{\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{dt}{ds}\right|}$

Richtungsableitung = $\vec{h}\, \vec{\nabla} \Phi$; wobei $|\vec{h}|=1$

totale Ableitung

$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i}\, \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}$

Vektordifferentialoperatoren

Nabla Operator: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Gradient: grad(Φ) = $\vec{\nabla}\Phi$

Divergenz: div($\vec{a}$) = $\vec{\nabla}\, \vec{a}$

Rotation: rot($\vec{a}$) = $\vec{\nabla} \times \vec{a}$

Laplace = $\Delta\Phi = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\,\Phi$

div(rot($\vec{a}$))=0

rot(grad(Φ))=0

Integration im R³

$$\int \mathbf{a}\,dt = \begin{pmatrix} \int a_1(t)\,dt \\ \int a_2(t)\,dt \\ \int a_3(t)\,dt \end{pmatrix}$$

Kurven-Integral

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}(\vec{r}(t))\,\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\,dt$$

$\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ ➔ Konservatives Kraftfeld

genauso: es gibt Φ für das gilt $\vec{\nabla}\Phi = \vec{F}$

Taylor-Reihe

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Komplexe Zahlen

$$z = R\,e^{i\pi\varphi} = R[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\,e^{\left(\frac{i\varphi}{n} + k\frac{2\pi i}{n}\right)}$$

Errorfunktion

$$\mathrm{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$\lim_{x\to\infty}(\mathrm{erf}(x)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$$

Γ(n+1)=n!

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{n!\,2^{2n}}$$

Allgemeine Gleichung 3. Grades

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$q = \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{9}a_2^2 \quad p = \frac{1}{6}(a_1 a_2 - 3a_0) - \frac{1}{27}a_2^3$$

$$s_1 = \sqrt[3]{p + \sqrt{q^3 + p^2}} \quad s_2 = \sqrt[3]{p - \sqrt{q^3 + p^2}}$$

$$x_1 = s_1 + s_2 - \frac{1}{3}a_2$$

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{1}{3}a_2 \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Substitution

$\int f(y)dy = \int f(g(x))\;g'(x)dx$

Partielle Integration

$\int f\,g = F\,g - \int F\,g'$

Funktion und Ableitung

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Tabellen

F(s)	f(t)
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at}-1)$
$\frac{1}{(s-b)(s-a)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	sin(a t)
$\frac{a}{s^2-a^2}$	sinh(a t)
$\frac{s}{s^2+a^2}$	cos(a t)
$\frac{s}{s^2-a^2}$	cosh(at)
$\frac{s}{(s-b)(s-a)}$	$\frac{a e^{at} - b e^{bt}}{a-b}$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t\,e^{at}$
$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{t^2}{2}e^{at}$
$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\sin(a\,t)$
$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos(a\,t)$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$t^n\,e^{-at}$

Funktion	Ableitung
a^x	$a^x\ln(a)$
sin(x)	cos(x)
cos(x)	-sin(x)
tan(x)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
x ln(x) - x	ln(x)
$\frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$	$\sin^2(a\,x)$
$\frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin(2ax)$	$\cos^2(ax)$

Trigonometrie

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$