Spezielle Relativitätstheorie

Gammafaktor: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Zeitdilatation: $t = \gamma t_0$

Längenkontraktion: $L = \frac{1}{\gamma} L_0$

Lorentztrafo: $x' = \gamma(x - \beta ct)$; $ct' = \gamma(ct - \beta x)$

Geschwindigkeitsaddition: $u_x = \frac{u_x' + v_x}{1 + \frac{u_x' . v_x}{c^2}}$;

$u_y = \frac{1}{\gamma(v_x)} \frac{u_y'}{1 + \frac{u_x' . v_x}{c^2}}$; $u_z = \frac{1}{\gamma(v_x)} \frac{u_z'}{1 + \frac{u_x' . v_x}{c^2}}$

Relativ. Masse: $m = \gamma m_0$

Relativ. kinetische Energie: $E_{kin} = (\gamma - 1) m_0 c^2$

Relativ. Gesamtenergie: $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$

Relationen: $p^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2$; $\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}$;

$p = m_0 c \sqrt{\gamma^2 - 1}$; $\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}$; $p = \gamma m_0 v$

$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Lorentzmatrix: $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Basistransformation: $\hat{e}_\alpha = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha} \hat{e}_{\bar{\beta}}$

Komponententransformation: $A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^\beta$

$\vec{A}^2 > 0$: raumartig; $\vec{A}^2 = 0$: lichta.; $\vec{A}^2 < 0$: zeita.

Minkowski -Metrik: $\eta_{\alpha\beta} = \hat{e}_\alpha . \hat{e}_\beta$

Vierer-Geschwindigkeit: $\vec{u} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$

Vierer-Impuls: $\vec{P} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p}_{rel} \end{pmatrix}$

Relativistische Stöße: $\sum_j \vec{P}_j = \sum_k \vec{P}_k$

Vierer-Beschleunigung: $\frac{d\vec{u}}{d\tau} = \vec{A}$

Relativ. longitudinaler Dopplereffekt: $\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

Relativ. allg. Dopplereffekt: $\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \gamma(1 - \beta \cos(\theta))$

Tensoren und Differentialformen

Vektor in Basisdarstellung: $\vec{A} = A^\alpha \hat{e}_\alpha$

Kontraktion: $A^\alpha p_\alpha = r \in \mathbb{R}$

Duale Basis $\hat{e}_\beta \tilde{\omega}^\alpha = \delta_\beta{}^\alpha$

Gradient als Einsform: $\tilde{d}\Phi = (\frac{\partial \Phi}{\partial x^0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3})$

kovariante Ableitung: $\frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} = \Phi_{,\alpha}$

$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = x^\alpha{}_{,\beta} = \delta^\alpha{}_\beta$; $\tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \tilde{\omega}^a = f_{,\alpha} \tilde{\omega}^\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \tilde{d}x^\alpha$

äußeres Produkt: $\tilde{q} \otimes \tilde{p}(\vec{A}, \vec{B}) = \tilde{q}(\vec{A}).\tilde{p}(\vec{B})$

$\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} - Tensor : \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \otimes ... \otimes \tilde{\omega}^\sigma$

Symmetrischer Tensor: $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$

Antisymmetrischer Tensor: $h_{\alpha\beta} = -h_{\beta\alpha}$

Symmetrischer Anteil: $h_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha})$

Antisymmetrischer Anteil: $h_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha})$

$h_{\alpha\beta} = h_{(\alpha\beta)} + h_{[\alpha\beta]}$; $h_{(\alpha\beta)} . h_{[\alpha\beta]} = 0$

Betrag von Einheitsnormalform: $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \pm 1$; $\frac{\tilde{p}}{|\tilde{p}|} = \pm 1$

Transformationsverhalten: $R^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu} \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} R^\mu{}_\nu$

Differentiation von Tensoren: $\frac{dT^\alpha{}_\beta}{d\tau} = T^\alpha{}_{\beta,\gamma} U^\gamma$

Transposition: $N(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$

Dachprodukt: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{u}$

Duale Tensoren: $J_{\alpha\beta\gamma} = J^\mu \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}$

Hydrodynamik

Fluid mit 5 makroskopischen Größen beschreibbar:

$\vec{u}(\vec{x}, t)$; $P(\vec{x}, t)$, $\rho(\vec{x}, t)$ $[P = f(\rho, T)]$

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0$ (quellfrei)

Mit Quellen/Senken q → $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = q$

Newton 2 für Flüssigkeit: $-\vec{\nabla} P = \rho \frac{d\vec{u}}{dt}$

Eulergleichung: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{F}_{ext}$

$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})) = 0$ (wenn S = const.)

1. HS der Thermodynamik: $dE + p.DV = \delta Q$

$\delta Q = T.dS$; $dP = \rho.dw$; $H = E + P.V$

Enthalpie pro Massendichte: $w = E + \frac{P}{\rho}$

Hydrostatische GGW: $P(z)-P(z_0)=-\rho_0 g(z-z_0)$
Gibb'sche freie Enthalpie: $G=H-T.S$
Allg. Gasgleichung: $P.V=n.R.T$
Auftriebskraft: $\vec{F}_A=\rho_{Fl} g V_K \hat{e}_z = M_{Fl,K} g \hat{e}_z$
Poisson-Gleichung: $\Delta\Phi(\bar{x})=4\pi G\rho(\bar{x})$
Bernoulli-Gleichung: $\frac{1}{2}u^2+E+\frac{P}{\rho}+gz=const$
stationärer Strömung: $\frac{d\bar{u}}{dt}=\bar{u}\vec{\nabla}\bar{u} =_{Kugelsymmetrie} \bar{u}\frac{d\bar{u}}{dr}$
Energiestrom: $\mathcal{E}=\frac{1}{2}\rho u^2+\rho E$
Energiestromdichtevektor: $\bar{\chi}=\rho\bar{u}(\frac{1}{2}u^2+E+\frac{P}{\rho})$
Massenfluss = Massenstromdichte : $\rho\bar{u}$
Impulsstrom: $\bar{p}=\rho\bar{u}$
Impulsstromdichtetensor: $\Pi_{ik}=P\delta_{ik}+\rho u_i u_k$
$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)=-\partial_k\Pi_{ik}$; $\frac{\partial\bar{\varpi}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times(\bar{\varpi}\times\bar{u})=0$
Zirkulation: $\Gamma=\oint_C \bar{u}.d\vec{l}$
Wirbelstärke: $\bar{\varpi}=\vec{\nabla}\times\bar{u}$
Freie Fallzeit: $\tau_{ff}=\sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}$
Clausiusches Virial:
$2\langle E_{kin}\rangle+\left\langle\sum_{i=1}^N \vec{F}_i\vec{r}_i\right\rangle=\frac{1}{\tau}(G(\tau)-G(0))$
Virialtheorem: $\langle E_{kin}\rangle=-\frac{1}{2}\left\langle\sum_{i=1}^N \vec{F}_i\vec{r}_i\right\rangle$
Thermodynamik: $E_{gas}=\frac{f}{2}N.k_B.T$
Boyl'sches Gesetz: $P.V=N.k_B.T$
Eddington-Leuchtkraft:
$L_E=\frac{4\pi.G.M.m_P.c}{\sigma_T}=10^{4,5}(\frac{M}{M_\odot})L_\odot$
Thomsonquerschnitt: $\sigma_T=\pi r^2{}_e$
Selbstenergie des Elektrons: $r_e\approx\frac{e^2}{m_e c^2}$
„Strahlungsdruck": $f_{rad}=\frac{dp}{dt}=\frac{\dot{E}}{c}=\frac{L}{c}=\frac{\sigma_T L}{4\pi R^2 c}$
Virialsatz für Zentralkraft: $2\langle E_{kin}\rangle+\langle V_{pot}(r)\rangle=0$
Gravitationsradius: $r_g=\frac{GM^2}{|V_{pot}|}=\frac{5}{3}R_0\approx\frac{r_H}{0,4}$
$\langle v^2\rangle=\frac{GM}{r_g}$

Gegendruck einer kollabierenden Gaswolke: $\bar{P}=-\frac{1}{3}\frac{E_{grav}}{V}$
Potentialströmung: $\vec{\nabla}\bar{u}=0$ → $\Delta\varphi=0$
Schallgeschwindigkeit: $c_s=\sqrt{(\frac{\partial P}{\partial\rho})_S}=\sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}}$
Adiabatenexponent: $\gamma=\frac{f+2}{f}$; isotherm: $\gamma=1$
Druck und Ionisationsgrad: $P=nk_B T(1+\chi)$
Ionisationsgrad: $\chi=0\hat{=}$ keiner; $\chi=1\hat{=}$ vollst.
$\rho=n\bar{m}$; n…Teilchendichte; $\bar{m}$: Masse/Teilchen
Dispersionsrelation: $\omega^2(k)=k^2 c_s{}^2-4\pi G\rho$
Jeanslänge: $\lambda^2{}_j=\frac{\pi c_s{}^2}{G\rho_0}$
Jeansmasse: $M_j=\frac{4}{3}\pi\rho_0(\frac{1}{2}\lambda_j)^3=\frac{1}{6}\pi\rho_0(\frac{\pi c_s{}^2}{G\rho_0})^{3/2}$

Nützliche Formeln

DGL: Typ $y'+r(x)y=s(x)$
Lösung: $c=y.e^{\int^x r(z)dz}-\int^x s(z).e^{\int^z r(\xi)d\xi}dz$
DGL: Typ: $f_2(x)y''+f_1(x)y'+f_0(x)y=f(x)$
$y_H+y_P=(a.u_1(x)+b.u_2(x))+(A(x).u_1+B(x).u_2)$
$A'=\frac{u_2 f(x)}{f_2(x)(u_2u_1'-u_1u_2')}$; $B'=-\frac{u_1 f(x)}{f_2(x)(u_2u_1'-u_1u_2')}$
Quotientenregel: $(\frac{f}{g})'=\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$
Substitution: $\int f(y)dy=\int f(g(x))g'(x)dx$
Partielle Integration: $\int fg=Fg-\int Fg'$
Winkelsätze: $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$
$\sin(\alpha)\pm\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha\pm\beta}{2})\cos(\frac{\alpha\mp\beta}{2})$
$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$