

*Dynamik von Planetensystemen I – Übung*

# **Protokoll**

Resonanzen im Sonnensystem, Standard-Map

*Christoph Saulder*  
*Mat.Nr.: 0400944*

## Venus-Erde

Ein Sonnensystem bestehend aus Sonne, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn wurde über einen Zeitraum von 10000 Jahren berechnet, wobei die Bahnelemente alle 10 Jahre ausgegeben wurden. Das Maximum der Exzentrizität der Erde lag bei 50 Jahren nach Beginn der Simulation und das Minimum dieses Bahnelements war nach 28210 Jahren zu finden. Bei der Venus kam es zu einer minimalen Exzentrizität nach 44970 Jahren und das Maximum wurde bei 99950 Jahren erreicht. Wobei man bei letztem sagen muss, vor allem nach Betrachtung des Graphen, dass die maximale Exzentrizität am Ende der Berechnungszeitspanne liegt und vermutlich danach noch weiter ansteigen wird. Zur Erde sei noch erwähnt, dass es ein Nebenmaximum bei etwas mehr als 80000 Jahren gibt.

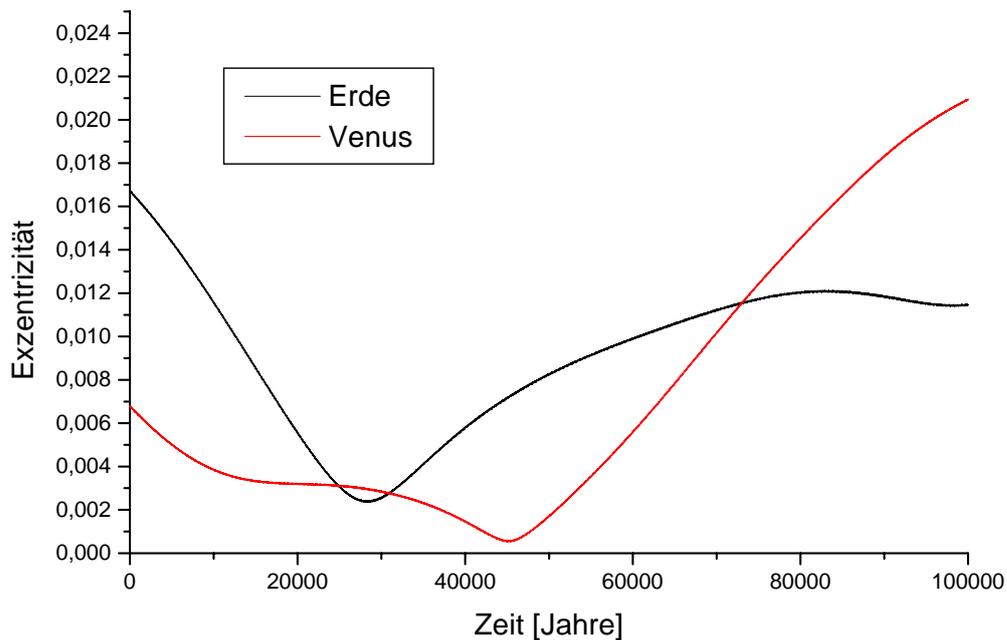


Abb.1: Erde-Venus in einem vereinfachten Sonnensystem

## Jupiter alle drei Resonanzen

Für diese Berechnungen wurde ein vereinfachtes Sonnensystem bestehend aus Sonne, Jupiter und einem masselosen Asteroiden angenommen. Die Exzentrizität von Jupiter wird zwischen 0,00 und 0,20 variiert. Weiters wurde die Jupiterentfernung auf 1AE normiert. Der Asteroid befindet sich genau auf einer Resonanzbahn mit Jupiter, wobei es sich dabei entweder um eine 3:1, eine 2:1 oder eine 3:2 Resonanz handeln kann. Die Ausgangsexzentrizität des Asteroiden ist Null. Es wird ein Zeitraum von einer Million Jahren berechnet.

Ausgangswerte für die große Halbachse des Asteroiden:

Resonanz	Große Halbachse [AE]
3:1	0,481
2:1	0,630
3:2	0,763

Das Ergebnis der Berechnung ist in soweit überraschend, dass die angeblich relativ stabile 3:2 Resonanz, sich als am instabilsten herausstellt. Weiters scheinen die Störungen hier relativ stark von der minimalen Entfernung zu Jupiter abzuhängen, da laut meiner Berechnung die 3:1 am stabilsten ist. Jedoch zur Verteidigung der 3:2 Resonanz ist noch anzumerken, dass die Escapes erst bei einer Exzentrizität von mehr als der realen Jupiterexzentrizität auftreten. Vermutlich kommt bei größeren Werten der Asteroid den Jupiter einfach zu nahe und wird hinauskatapultiert. Bei allen drei Resonanzen ist in allgemeinen eine Abhängigkeit der Störung(Höhe der Exzentrizitätsmaxima des Asteroiden) von der Exzentrizität der Jupiterbahn festzustellen. Bei der 3:1 Resonanz liegen die Maxima der Exzentrizität des Asteroiden bei einer Jupiterexzentrizität von 0,2 bei etwa 0,2, bei der 2:1 reichen diese Werte schon bis 0,45 und bei der 3:2 kommt es ab einer Jupiterexzentrizität von 0,06 zu Escapes innerhalb der ersten 100000 Jahren.

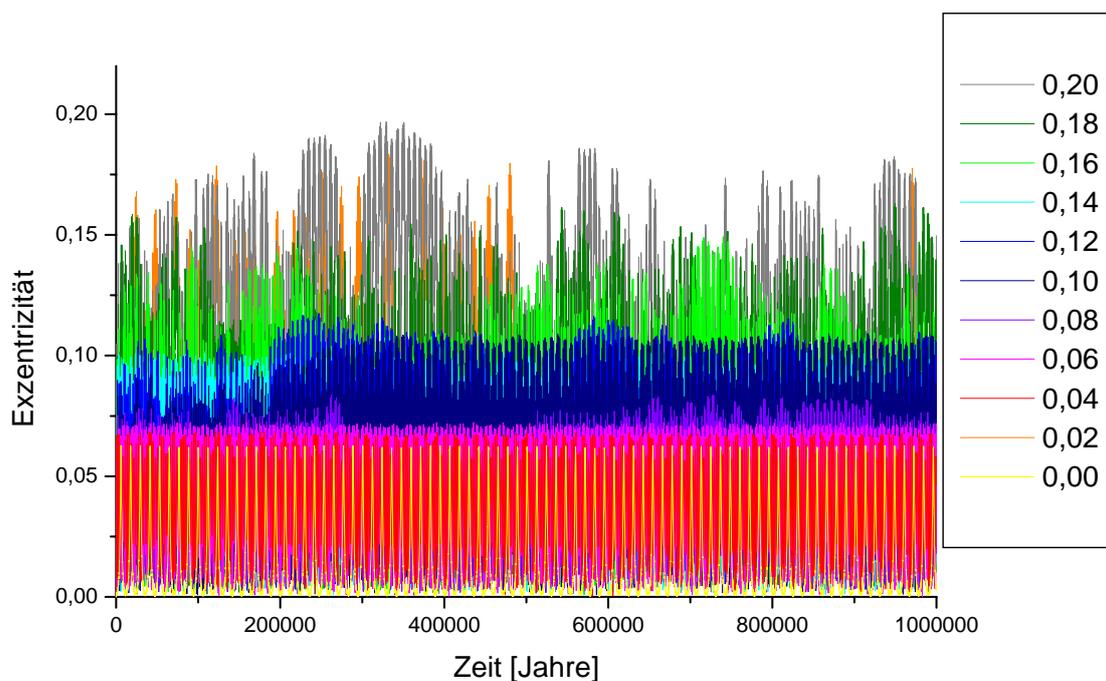


Abb.2: 3:1 Resonanz mit Jupiter

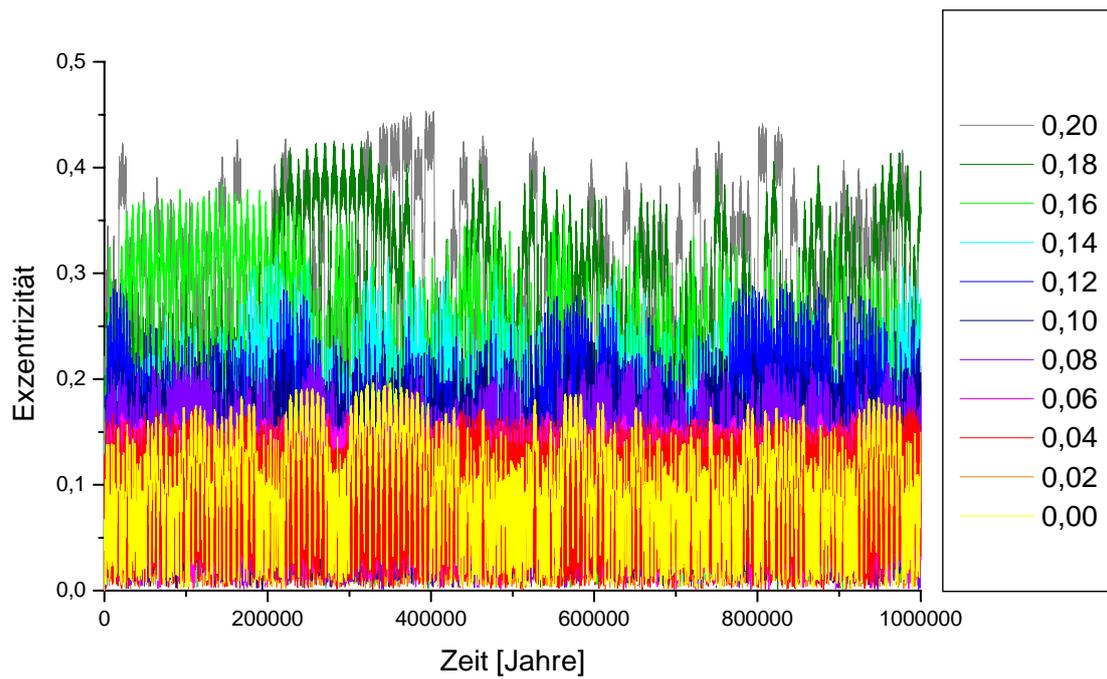


Abb.3: 2:1 Resonanz mit Jupiter

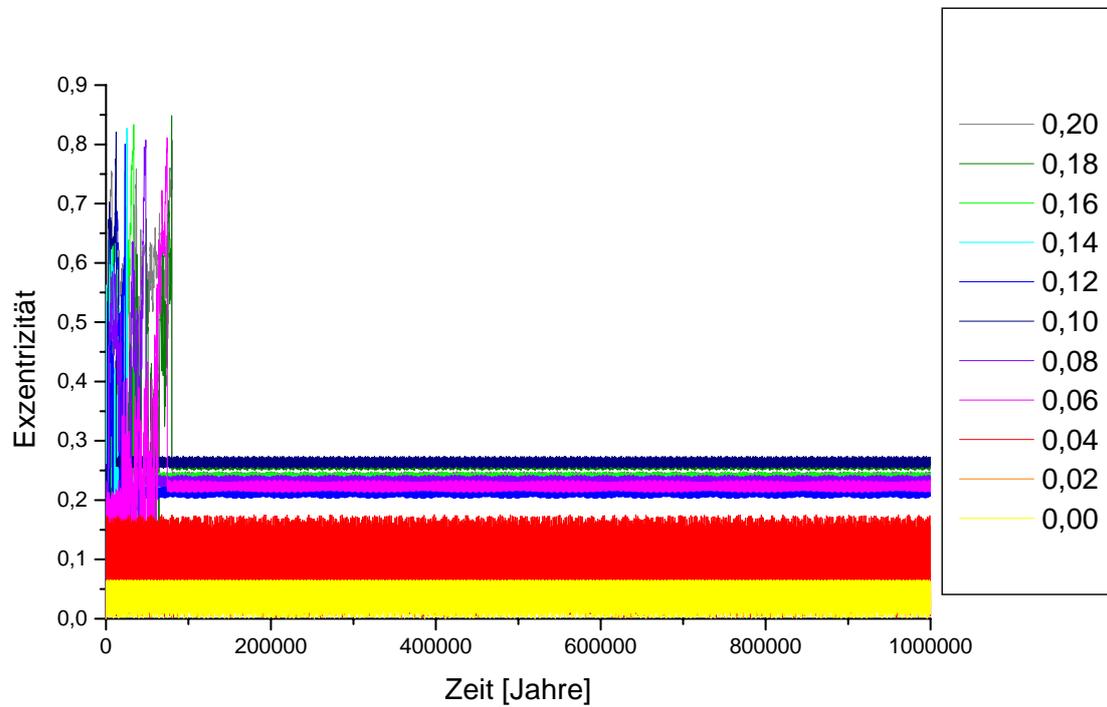


Abb.4: 3:2 Resonanz mit Jupiter

## Jupiter – Saturn - Asteroid

Zur Veranschaulichung von säkularen Resonanzen berechneten wir ein Sonnensystem bestehend aus Sonne, Jupiter, Saturn und einem Asteroiden über eine Million Jahre. Die Entfernung Jupiter-Sonne wurde wieder auf eine 1AE gesetzt und die anderen Entfernungen wurden entsprechend angepasst. Saturn bekam seine tatsächlichen Bahnelemente zugewiesen, genauso wie Jupiter, jedoch mit Ausnahme der Exzentrizität, welche folgende Werte erhielt: 0,00; 0,048; 0,08; 0,10; 0,12; 0,16; 0,20. Der Asteroid befand sich auf der 3:1 Resonanz mit Jupiter und hatte eine Ausgangsexzentrizität von 0,05.

Die Berechnung zeigte, dass ab es ab einer Jupiterexzentrizität von 0,08 innerhalb von 100000 Jahren zu Escapes kommt, welche umso früher stattfinden je größer der Wert für das soeben erwähnte Bahnelement ist. Für die wahre Jupiterexzentrizität wird der Asteroid stark gestört, bleibt jedoch fast 800000 Jahre noch drin. Der Exzentrizitätsverlauf zeigt in diesem Fall (und auch bei einer Jupiterexzentrizität von 0,00) ein Muster, welches an eine Schwebung erinnert, wobei jedoch die Amplitude langsam zunimmt, bis es zur „Resonanzkatastrophe“ kommt. Das Verhalten des Asteroiden bei einer verschwindenden Jupiterexzentrizität ist recht interessant. Es ist dem vorherigen sehr ähnlich, nur dass die Amplitude etwa konstant bleibt. Doch ziemlich genau 800000 Jahre nach Beginn der Berechnung scheint sich der Asteroid in eine relativ stabile Position eingefunden zu haben, da die Exzentrizität verschwindend klein wird. Eine Überprüfung der anderen Bahnelemente hat gezeigt, dass es sich nicht um einen schnellen Escape handelt, da seine große Halbachse in einem Bereich um etwa 0,48AE liegt.

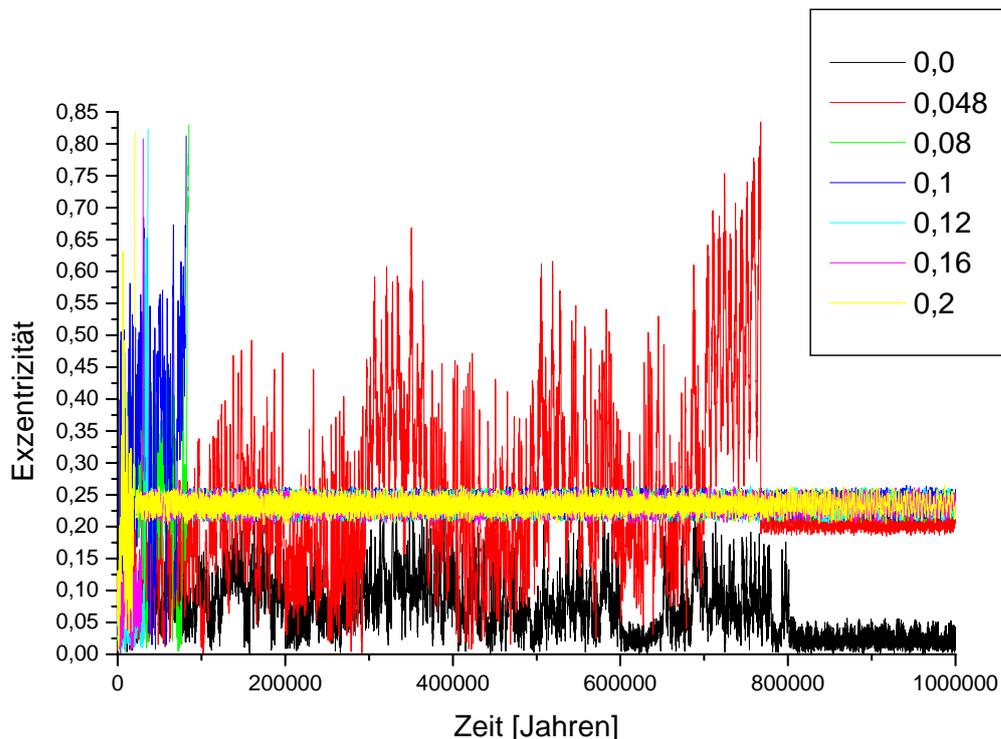


Abb.6: säkulare Resonanz in einem System mit Jupiter und Saturn

### Asteroid in 3:2 Resonanz mit Jupiter

Der Abstand Jupiter-Sonne wurde auf 1 normiert. Ein Asteroid mit Masse Null wird nahe der 3:2 Resonanz mit Jupiter angenommen, wobei ich die große Halbachse 0,753 und 0,773 AE in 0,02 AE Schritten variierte. Weiters hatte der Asteroid eine kleine Ausgangsexzentrizität von 0,05. Weiters wurde die Exzentrizität von Jupiter zwischen 0,00 und 0,20 in 0,02 Schritten variiert. Nach einer Berechnung mit dem Lie-Integrator über eine Zeitspanne von einer Million Jahren wurde die Maximale Exzentrizität in dieser Zeit vom Asteroiden ausgelesen, wobei ich für einen Escape(N/A-Wert in Tabelle) die Exzentrizität gleich 1 setzte. In ein dreidimensionales Flächendiagramm eingetragen sieht das Ergebnis wie folgt aus:

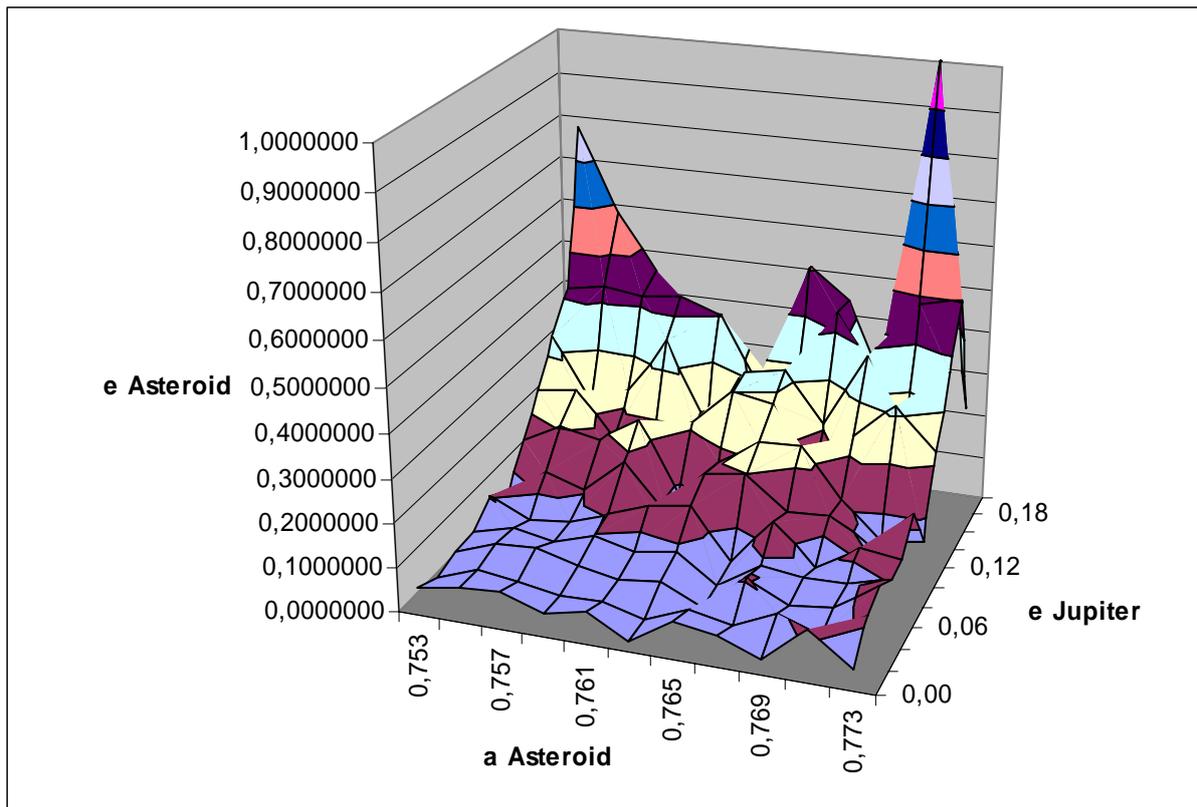


Abb.7: 3:2 Resonanz mit Jupiter, 3D-Diagramm

## Standard-Map

Es war die Aufgabe gestellt worden, mit einem selbstprogrammierten Programm für Standard-Map einige Maps zu berechnen. Für die Werte des  $k$ -Parameters von  $-0,1$ ,  $-1,3$  und  $-10$  berechnete ich die Kombination mehrerer Maps mit unterschiedlichen Anfangswerten.

Bei einem  $k$ -Wert von  $-0,1$  zeigten sich bei allen 6 verschiedenen Anfangswerten stabile Bahnen.

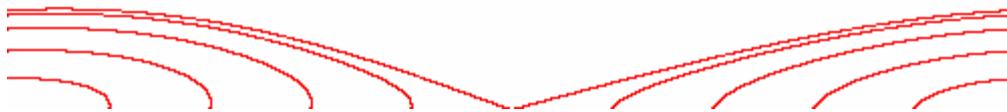
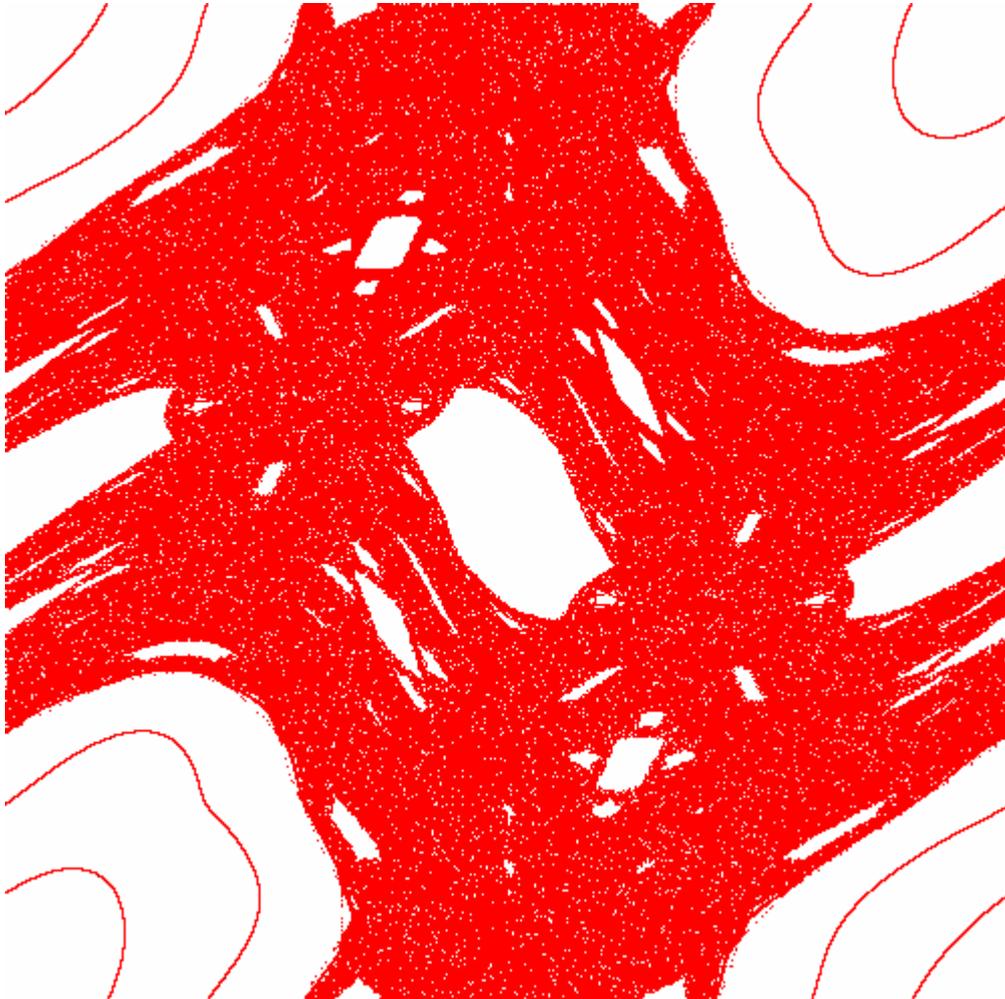


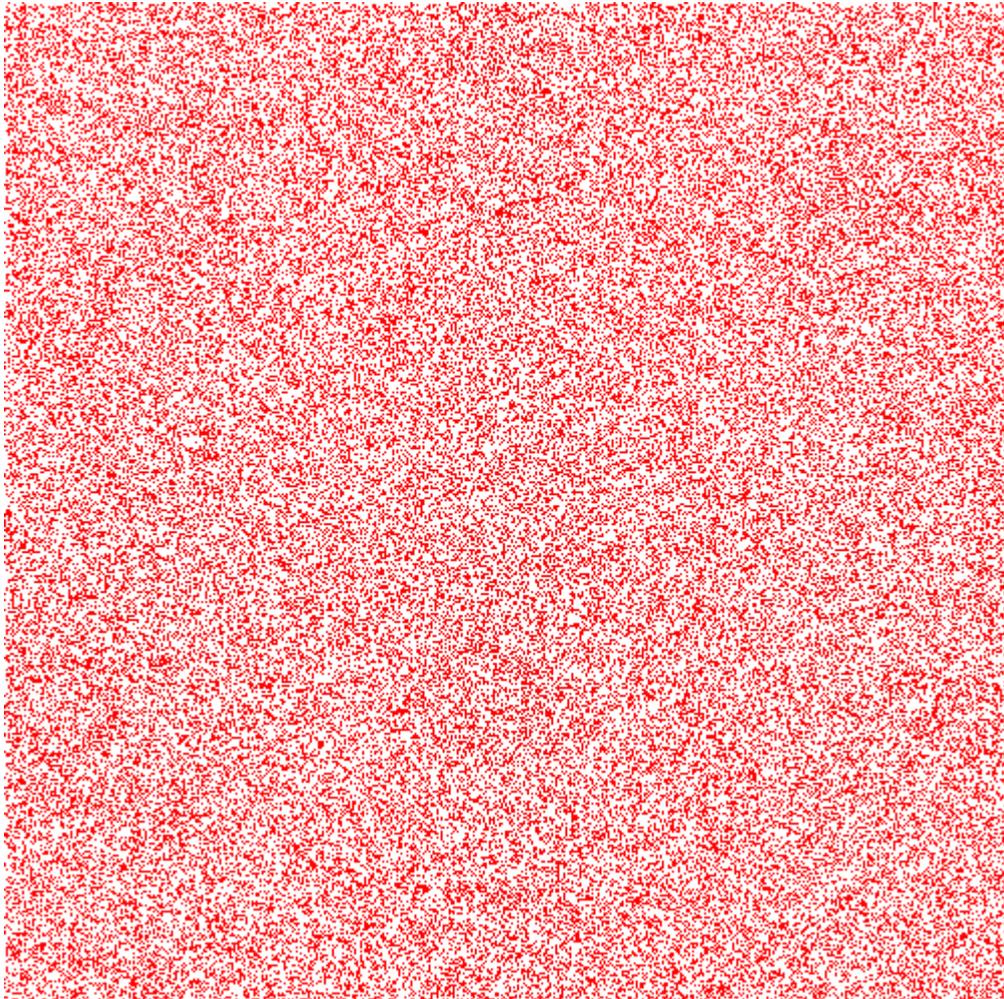
Abb.8: Standard-Map bei  $k = -0,1$

Bei einem  $k$ -Wert von  $-1,3$  zeigten sich bei 9 verschiedenen Anfangswerten stabile Bahnen sowie chaotische Bahnen. Dadurch treten bei einer Überlagerung aller Grafiken der Startwerte die stabilen und instabilen Bereiche deutlich hervor. Die Bereiche um die Ecken sind stabil, sowie die Mitte und einige Inseln mitten im instabilen Bereich.



*Abb.9: Standard-Map bei  $k = -1,3$*

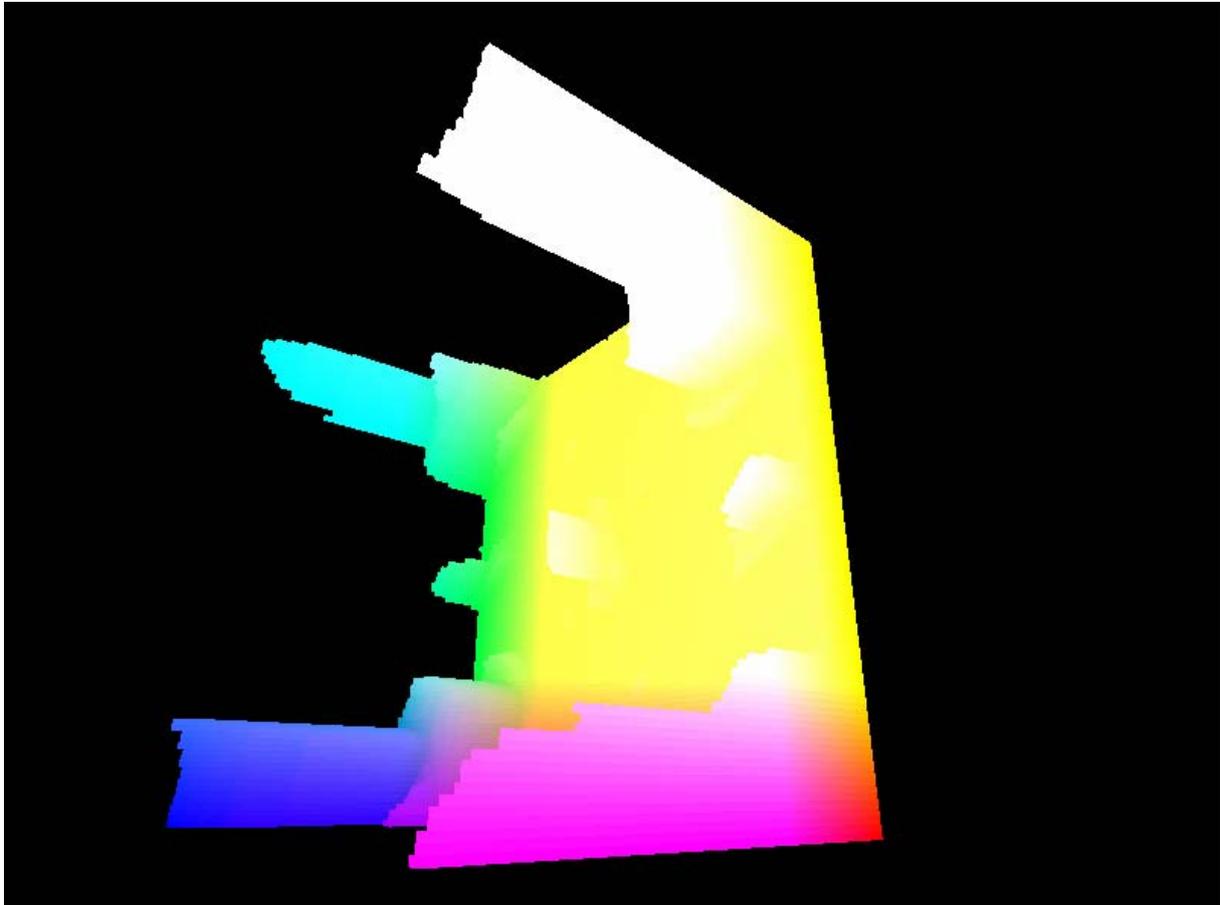
Bei einem  $k$ -Wert von  $-10$  zeigt sich bei allen Werten eindeutig chaotisches Verhalten und zwar über den ganzen Raum. Das somit entstehende Muster entspricht einer reinen Zufallsverteilung.



*Abb.10: Standard-Map bei  $k = -10$*

## Standard-Map 3D

Zusätzlich programmierte ich ein Programm, welches die stabilen Bereiche eines Standard-Maps in 3D darstellen kann. Wobei zwei Koordinaten-Achsen wie gewöhnlich für x- und y verwendet werden und die dritte Achse wird für den k-Parameter verwendet. Es fällt auf, dass die stabilen Bereiche in k-Richtung oft sehr spontan kleiner werden.



*Abb.11: 3D-Standardmap:  $k$  von  $-1$  bis  $-6$ ,  $x$ -,  $y$ - und  $k$ -Auflösung von je 100 Pixels*