$\vec{p} = m\vec{v}$; $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Drehimpuls

$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ Drehmoment

$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.d\vec{s}$ Arbeit

$T = \frac{1}{2} mv^2$ kinetische Energie

$T + V = const.$ Energieerhaltung

$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i.\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$ Schwerpunktsvektor

$M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{ext}$ externe Kraft

$\vec{L} = \vec{R} \times M.\vec{v} + \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{p}_i{}'$

$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, t) = 0$ holonome ZB

$Q_j = \sum_i \vec{F}_i . \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}$ generalisierte Kräfte

$Q_j = -\frac{dV}{dq_j}$ falls V Skalarpotential

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ Euler-Lagrange-Gl.

wobei L=T-V

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$ mit Zwangskraft

$Q_j = \sum_l \lambda_l a_{lk}$ bei nicht holonomen ZB

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$ DGL math. Pendel

$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}.t)$ Lösung

f(y,y',x) hat Extremum wenn:

$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0$ Eulergleichung

$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ Kanonischer Impuls

Kommt eine generalisierte Koordinate in den ELG nicht vor so heißt diese zyklisch. Ihr kanonischer Impuls ist somit erhalten.

$\mu = \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}$ reduzierte Masse

$L(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu.\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, ...)$

Lagrange-Fkt für 2 Körperproblem mit:

$\vec{R}$ =Schwerpunktsvektor, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\frac{dA}{dt} = const = \frac{l}{2\mu}$ 2. Keplersches Gesetz

$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$; $l = \mu.r^2.\dot{\theta}$;

$\mu.\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu.r^3} = f(r)$

$h(q, \dot{q}, t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$ Energiefkt.

$\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow h(q, \dot{q}, t) = const$ Jacobi-Int.

$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$

$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V - \frac{l^2}{2.\mu.r^2})}}$

$\theta(t) = \frac{l}{\mu}\int_0^t \frac{dt}{r^2(t)}$; $V = \frac{k}{r}$;

$V' = V + \frac{l^2}{2.\mu.r^2}$ fiktives Potential

wenn E=V' dann:
E>0 ➔ Hyperbel
E=0 ➔ Parabel
E<0 ➔ Ellipse
$E=V'_{min}$ ➔ Kreis

$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2.\mu.E}{l^2} - \frac{2.\mu.V}{l^2} - u^2}}$

Orbitgleichung mit $u = 1/r$

$V = -\frac{k}{r} \Rightarrow f = \frac{k}{r^2}$ für Keplerproblem

$\frac{1}{r} = \frac{\mu.k}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2.E.l^2}{m.k^2}} \cos(\theta - \theta')\right)$

$e = \sqrt{1 + \frac{2.E.l^2}{m.k^2}}$ Exzentrizität

$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle V \rangle$ Virialsatz

$\frac{l^2}{\mu.k} = a(1 - e^2)$ bei Ellipse

$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e.\cos(\theta - \theta')}$

$r_p = a.(1 - e)$ Periheldistanz

$r_a = a.(1 + e)$ Apheldistanz

$t = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{l^2}{2.\mu.r^2} + E}}$

$t = \frac{l^3}{\mu.k^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{(1 + e.\cos(\theta - \theta'))^2}$

allgemeine Lösung

$t = \frac{l^3}{4.\mu.k^2}(\tan(\frac{\theta}{2}) + \frac{1}{3}\tan^3(\frac{\theta}{2}))$

Lösung für Parabel (e=1)

$t = \sqrt{\frac{2.\mu.a^3}{2.k}} \int_0^{\psi} (1 - e.\cos(\psi'))d\psi'$

Lösung für Ellipse

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu.a^3}{k}}$ 3. Keplersches Gesetz

mit $k = G.m_1.m_2$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

$\omega t = \psi - e.\sin(\psi)$ Keplergleichung

$\tan(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan(\frac{\psi}{2})$

$t_E = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{G.m_{\odot}}} r_E((2\frac{r_p}{r_E} + 1)\sqrt{r_E}\sqrt{1 - \frac{r_p}{r_E}})$

Zeit eines Kometen innerhalb einer Planetenbahn

$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{l} - \mu.k.\frac{\vec{r}}{r}$ Runge-Lenz-Vektor

$\frac{1}{r} = \frac{\mu.k}{l^2}(1 + \frac{A}{\mu.k}\cos(\theta))$

$\frac{\delta\rho}{\rho} << 1$ bei Schallwellen

$p.V = N.k.T = \nu.R.T$ ideale Gasgl.

$(p + \frac{a.N^2}{V^2}).(V - b.N) = N.k.T$ vdW-Gl.

$n = \frac{N}{V}$ Teilchendichte

$p = n.k.T$ ideale Gasgleichung

$dU + p.V = \delta Q = T.dS$ 1. Hauptsatz

$dU = T.dS - p.dV$; Diff. innere Energie

$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \left.\frac{\delta Q}{\partial T}\right|_V = T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V$

Wärmekapazität bei konstanten Volumen

$C_p = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_p + p\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p = \left.\frac{\delta Q}{\partial T}\right|_p$

Wärmekapazität bei konstantem Druck

$C_p - C_V = R$; $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$

$c_p = \frac{C_p}{m}$; $c_V = \frac{C_V}{m}$ spezifische Wärmekap

$U = C_v.T = \frac{f}{2}N.k.T$ für ideales Gas

$U_{pro\_f} = \frac{1}{2}k.T$ Gleichverteilungssatz

adiabatische: δQ=0 ➔ $p.V^{\gamma} = const(S)$

$S = S_0 + C_v \ln(\frac{p}{\rho^{\gamma}}) = S_0 + \frac{R}{\gamma - 1}\ln(\frac{p}{\rho^{\gamma}})$

$c_s^2 = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma\frac{R.T}{m} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S$ Schallgeschw.

$S(T,V)=\int_{T_0}^{T} C_v \frac{dT'}{T'}+\int_{V_0}^{V} R\frac{dV'}{V'}$;

$dS=\frac{\delta Q}{T}$ Entropie (wenn adiab. dS=0)

$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+(\bar{u}.\vec{\nabla}).\bar{u}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$ Euler-Gleichung

$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\bar{u}.\vec{\nabla})$ konvektive Ableitung

$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho.\bar{u})=0$ Kontinuitätsgleichung

$E=\frac{1}{2}\rho.u^2+\rho.\varepsilon$ Energie pro Volumen

$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho.u^2+\rho.\varepsilon)=-\vec{\nabla}(\rho.\bar{u}(\frac{1}{2}u^2+\varepsilon+\frac{p}{\rho}))$

$M=\frac{u}{c}$ Machzahl; $c_0{}^2=\gamma\frac{p_0}{\rho_0}$

$\frac{1}{M}=\sin(\frac{\alpha}{2})$ Machkegel

Rankine-Hugoniot-Bedingungen

$\rho_0.u_0=\rho_1.u_1$; $\rho_0.u_0{}^2+p_0=\rho_1.u_1{}^2+p_1$

$\frac{1}{2}.u_0{}^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{1}{2}.u_1{}^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}$

$\frac{\rho_1}{\rho_0}=\frac{u_0}{u_1}=\frac{(\gamma+1)M_0{}^2}{(\gamma+1)+(\gamma-1)(M_0{}^2-1)}$

$\frac{p_1}{p_0}=\frac{(\gamma+1)+2\gamma(M_0{}^2-1)}{\gamma+1}$

$\frac{T_1}{T_0}=\frac{((\gamma+1)+2\gamma(M_0{}^2-1))((\gamma+1)+(\gamma-1)(M_0{}^2-1))}{(\gamma+1)^2M_0{}^2}$

starker Stoß ➔ $\frac{\rho_1}{\rho_0}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$;

$\frac{p_1}{p_0}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_0{}^2$; $\frac{T_1}{T_0}=\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}M_0{}^2$

$\Phi=\rho.u$; $\Pi=\rho.u^2+p$;

$E=\frac{1}{2}u^2+\frac{5}{3}\frac{p}{\rho}$; $\bar{u}=u+\frac{p}{\rho.u}=\frac{\Pi}{\Phi}$;

$M^2=\frac{3}{5}\frac{u}{\bar{u}-u}$; $\eta=\frac{u}{\bar{u}}$;

$\varepsilon_T=\eta(\frac{5}{2}-2\eta)$; $\varepsilon_I=\frac{3}{2}\eta(1-\eta)$;

$\varepsilon_K=\frac{1}{2}\eta^2$; $M^2=\frac{3}{5}\frac{\eta}{1-\eta}$;

$\sigma=\eta^{5/3}(1-\eta)$;

$F=U-T.S$ weil T,V=const

$G=H-T.S$ weil p,T=const

$\frac{u_1}{u_0}=\frac{v_1-v_{sh}}{v_0-v_{sh}}\approx 1-\frac{v_1}{v_{sh}}$ bei starken Stoß

$p_1\approx\frac{3}{4}\rho_0 u_0{}^2$ bei starken Stoß

➔ $\varepsilon_{I,1}=\frac{9}{32}v_{sh}{}^2$

$T_2\approx T_0$ isotherm $\tau_{cool}=\frac{d}{v_1}<<\tau_{dyn}\approx\frac{R_{sh}}{v_{sh}}$

$c_{iso}{}^2=\frac{k.T}{N_{Teilchen}/m_{gesamt}}$; $u_0.u_2\approx c_0{}^2$;

$G=n_H.\Gamma$ Heizleistung

$L=n_H{}^2.\Lambda$ Kühlleistung

$L=1{,}37.10^{-32}\frac{\rho}{m_A{}^2}T^{-1/2}$ Kahn's Kühlg.

$m_A=2.10^{-27}kg$; $m=\frac{1}{2}m_A$;

$\kappa=\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{k.T}{m.\rho^{2/3}}$; $\tilde{q}=\frac{\kappa.k^{3/2}}{m_A{}^2.m^{3/2}.C_V}$;

$q=\frac{3}{2}\tilde{q}$; $t_{cool}=\frac{\kappa^{3/2}(T)}{q}$ Kühlzeit

$t_{cool}=\left|\frac{T}{dT/dt}\right|=\frac{3.k.T.n}{L}$ Kühlzeit

$\lambda\!\!\!^{-}=L-G=0$ im thermischen GGW

$-\lambda\!\!\!^{-}=T(\frac{\partial S}{\partial t}+(\bar{u}.\vec{\nabla})S$

$N_p=\frac{1}{C_p}\left.\frac{\partial\lambda\!\!\!^{-}}{\partial T}\right|_p$; $N_V=\frac{1}{C_V}\left.\frac{\partial\lambda\!\!\!^{-}}{\partial T}\right|_V$;

$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-c_s{}^2\vec{\nabla}^2\delta\rho)=N_p.c_s{}^2\vec{\nabla}^2\delta\rho-N_V\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}$

$(\omega^2-c_s{}^2k^2)i\omega=N_V\omega^2-N_pc_s{}^2k^2$ Dispersionrelation

$\left.\frac{\partial\lambda\!\!\!^{-}}{\partial g}\right|_\rho<0$ Instabilität: tritt auf für große k wenn $N_p<0$ und für kleine k wenn $N_V<0$

$E_{kin}=h.\nu-I_{pot}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\approx\frac{v_{th}}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k.T_e}{m}}$ thermal broadening

$\dot{N}_{rec}=\sum_{n=2}^{\infty}\dot{N}_n=n_e{}^2\beta^{(2)}T_e$ Rekombination

$S_*=\int_{\nu_H}^{\infty}\frac{L_\nu{}^*}{h.\nu}$ Lyc-Photonenrate

$J=\frac{S_*}{4.\pi.r^2}$ Photonenfluss

$\dot{N}_{ion}=\alpha_0.n_H.J$ Ionisationsrate

$x=\frac{n_e}{n}=\frac{n_e}{n_p+n_{HI}}$ Ionisationsgrad

$\frac{x^2}{1-x}=\frac{J}{n}\frac{\alpha_0}{\beta^{(2)}}=A$; im Ionisations-GGW

$R_S=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{S_*}{n^2\beta^{(2)}}}$ Strömgrenradius

$S=\sum_i s_i$; $L=\sum_i l_i$; $J=\sum_i j_i$;

$J=L+S$ LS-Kopplung;

$J=\sum_i l_i+s_i$ JJ-Kopplung;

$J(x)=\frac{x^2}{1-x^2}\frac{n.\beta^{(2)}}{\alpha_0}=2.J\frac{x^2}{1-x^2}$

$R=R_S(1-e^{-\frac{t}{\tau_{rec}}})^{1/3}$ Ionisationsfront

$\tau_{rec}=(\beta^{(2)}.n)^{-1}$ Rekombinationszeitskala

Sprungbedingungen für die Ionisationsfront:

$\rho_1v_1=\rho_2v_2$; $\rho_1v_1{}^2+p_1=\rho_2v_2{}^2+p_2$;

$n_1v_1=J_2$; $J_2=\frac{S_*}{4\pi.r}e^{-\tau_{opt}(r)}$;

$v_Rv_D=c_1{}^2$; $v_R+v_D=2c_2$; $v_D=\frac{c_1{}^2}{2c_2}$;

$p_{sh}=\frac{2}{\gamma+1}\rho_0v_{sh}{}^2$ wenn isotherm γ=1

$R=R_S(1+\frac{7}{4}\frac{c_{II}.t}{R_S})^{4/7}$ gasdyn. Expansion

$R_{\max}=R_S(\frac{2.T_{II}}{T_I})^{2/3}$ maximaler Radius

$R_j=\rho_j[R_j]$; $[R_j]=\prod_{i=1}^{m}F_i^{a_{ij}}$;

$\hat{\rho}_j=\rho_j\prod_{i=1}^{m}x_i^{a_{ij}}$ in anderen

Fundamentalsystem: $\hat{F}_i=x_i{}^{-1}F_i$

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ Dimensionsmatrix

$[R_1^{\lambda_1}...R_n^{\lambda_n}]=\prod_{i=1}^{m}F_i^{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j}$ |=1(dimlos)

$A.\vec{\lambda}=\vec{0}$ Kern von A für dimlose Größen

Buckingham-Π-Theorem: Wenn eine physikalisch sinnvolle Beziehung $\Phi(R_1\ldots R_n)=0$, wobei $R_j\neq 0$, existiert, dann ist es äquivalent zu einer Beziehung der Form $\Psi(\pi_1\ldots\pi_{n-r})=0$, die einen maximalen Satz von unabhängigen dimensionslosen Kombinationen darstellt.

$u=\frac{2}{\gamma+1}v_{sh}$; $v_{sh}=\frac{2}{5}\frac{R_{sh}}{t}$; $p=\frac{8}{25(\gamma+1)}\rho_0\frac{r^2}{t^2}$;

$u(t_1)=u(t_0).f(\frac{r(t_1)}{r(t_0)})$ Selbstähnlichkeit

$R_{sh}=(\frac{25}{4\pi})^{1/5}.(\frac{E}{\rho_0})^{1/5}.t^{2/5}$ Sedow-Taylor

$E_{SN}=\int_0^{R_{sh}(t)}(\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho.u^2).4\pi.r^2dr$

$v_{sh}\propto t^{-3/5}$; $T\propto v_{sh}{}^2\propto t^{-6/5}\propto\frac{p}{\rho}$;

$p\propto\rho.v_{sh}{}^2$; bei SNR in Sedow-Taylor;

$E_{SN} = \frac{1}{2} M_{ej} . v_{ej}^2$ freie Expansion;

$T_1 = \frac{3}{32} \frac{\overline{m}.v_{sh}^2}{k}$ Temperatur bei freier Exp.

$R_{freie\_Exp.} = (\frac{3.M_{ej}}{4\pi.\rho_0})^{1/3}$; $t_{freie\_Exp.} = \frac{R_{freie\_Exp.}}{v_{ej}(=const)}$;

$p.V = (\gamma - 1) E_{SN}$; $t_{sedow-taylor} = \frac{2}{5} \frac{R_{sh}}{v_{sh}}$;

$R_s = R_{S0}(1 + 4\frac{v_{S0}}{R_{S0}}(t - t_0))^{1/4}$;

$v_s = v_{S0}(1 + \frac{v_{S0}}{R_{S0}}(t - t_0))^{-3/4}$; in

Impulsgetriebener Phase geht bis $v_s = c_0$

Exakte DGL

Typ: $Q(x,y)\, y' + P(x,y) = 0$

exakt wenn: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

sonst IF: $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{d \ln(g)}{dx}$

Löse: $f(x,y) = \int^y Q(x,y)\, dy + k(x)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int^y Q(x,y)\, dy\right) + k'(x) = P(x,y)$

$k(x)$ durch integrieren

Typ: $y' + r(x) * y = s(x)$

Lösung:

$c = y * e^{\int^x r(z)\,dz} - \int^x s(z)\, e^{\int^z r(\xi)\,d\xi}\, dz$

$e^{\lambda * x}$-Ansatz: Typ:

$a y'' + b y' + c y = 0$

Lösung $a*\lambda^2 + b*\lambda + c = 0$

falls $\lambda_1 = \lambda_2$ ➔ $y_H = (A + B\ \ x)\ \ e^{\lambda x}$

D-Operator

Störfunktion Typ $A\, e^{\mu x}$

Lösung: $y = \frac{1}{L(\mu)} A e^{\mu x}$

falls $L[\mu] = 0$ ➔ $L(D) = \frac{\Lambda(D)}{(D - \mu)^m}$ wobei $L(\mu) \neq 0$

$y = A \frac{x^m}{m!} \frac{e^{\mu x}}{\Lambda(\mu)}$

Typ: $c y'' + b y' + a y = \cos(p x)$

Lösung: $y = \frac{(-cp^2 + a - bD)}{(a - cp^2)^2 + b^2 p^2} \cos(px)$

geht gleich mit Sinus, Herleitung der Formel durch $-p^2 = D^2$ und dann erweitern mit konjugierten

Variation der Parameter

$f_2(x)\, y + f_1(x)\, y' + f_0(x)\, y = f(x)$

$y_H = a\ \ u_1(x) + b\ \ u_2(x)$

Lösung:

$A' = \frac{u_2 f(x)}{f_2(x)\,(u_2 u_1' - u_1 u_2')}$

$B' = -\frac{u_1 f(x)}{f_2(x)\,(u_2 u_1' - u_1 u_2')}$

➔ $\int^x$ ➔ A und B (wobei Konstante egal)

$y_A = a * u_1 + b * u_2 + A(x) * u_1 + B(x) * u_2$

Laplace-Transformation

$L(f) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$

$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$

z.B.: $L(f'') = -f'(0) - s f(0) + s^2 L(f)$

falls bei $x = x_0$ unstetig ➔

$L(f') = s L(f) - f(0) - [f(x_{0+}) - f(x_{0-})]\, e^{-s x_0}$

Typ: $a y'' + b y' + c y = f$

Lösung:

$a[s^2 y(s) - s\, y(0) - y'(0)] + b[s\, y(s) - y(0)] + c\, y(s) = L(f)$

Bernoulli'sche DGL

Typ: $y' + r(x)\, y = s(x)\, y^n$

Lösung: $v(x) = y(x)^{1-n}$

$\frac{v'}{1-n} + r(x)\, v = s(x)$

Cauchy-Riemann'sche DGL

$f(z) = u + i v$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

wenn erfüllt in z_0 und Umgebung ➔ $f(z)$ dort analytisch

Chauchy'scher Integralsatz

$\int_a^a f(z)\, dz = 0$

wenn keine Singularität gegeben

Anmerkung: wesentliche Singularität(schlimm!): Laurent-Reihe hat ∞-viele negative Glieder

Residuensatz

$\int f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z), z_j)$

$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z - z_0)^n f(z)]\right]$

inverse Laplace-Transformation

$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int F(s)\, e^{sx}\, ds$

linear unabhängig

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$

Vektoranalysis

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2\, a\, b \cos(\gamma)$

$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}$

$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ijl} = 2\, \delta_{kl}$

$\vec{c}\,(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ |\vec{c}| \cos(\alpha) \sin(\theta) = V$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin(\alpha) = A$

es existiert A^{-1} wenn $\det(A) \neq 0$

$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)}$ $\quad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$

$y_i = a_{ij}\, x_j$; $y_i\, a_{ik} = x_k$; $a_{ij}\, a_{ik} = \delta_{kj}$

$\frac{d}{dt}(\vec{a}\,\vec{b}) = \to \frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b}\frac{d\vec{a}}{dt}$

$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}$

$\frac{d}{dt}(\Phi\,\vec{a}) = \Phi\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}\vec{a}$

$\vec{r}(t) = v\, t\,(a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3)$

dann $a_i = \cos(\varphi_i)$ Richtungskosinus

Bogenlänge:

$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right| d\tau = \int_0^t \sqrt{\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_i}{d\tau}}\, d\tau$

➔ $s(t)$ ➔ $t(s)$ ➔ $r(t(s))$ ➔

$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ (Tangenteneinheitsvektor)

Krümmung : $\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{t}(s)}{ds}\right|$

Krümmungsradius $\rho(s) = k(s)^{-1}$

Hauptnormalenvektor $\vec{n} = \frac{\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{dt}{ds}\right|}$

Richtungsableitung = $\vec{h}\,\vec{\nabla}\Phi$; wobei $|\vec{h}| = 1$

totale Ableitung

$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}$

Vektordifferentialoperatoren

Nabla Operator: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Gradient: $\mathrm{grad}(\Phi) = \vec{\nabla}\Phi$

Divergenz: $\mathrm{div}(\vec{a}) = \vec{\nabla}\,\vec{a}$

Rotation: $\mathrm{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \times \vec{a}$

Laplace = $\Delta\Phi = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\,\Phi$

$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{a})) = 0$

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\Phi)) = 0$

Integration im R^3

$\int \vec{a}\, dt = \begin{pmatrix} \int a_1(t)\, dt \\ \int a_2(t)\, dt \\ \int a_3(t)\, dt \end{pmatrix}$

Kurven-Integral

$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}(\vec{r}(t))\, \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\, dt$

$\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ ➔ Konservatives Kraftfeld

genauso: es gibt Φ für das gilt $\vec{\nabla}\Phi = \vec{F}$

Taylor-Reihe

$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\ \frac{(x - a)^n}{n!}$

Laurent-Reihe

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)\, n + 1}$

Komplexe Zahlen

$z = R e^{i\pi\varphi} = R[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$

$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\, e^{\left(\frac{i\varphi}{n} + k\frac{2\pi i}{n}\right)}$

Errorfunktion

$\mathrm{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

$\lim_{x \to \infty}(\mathrm{erf}(x)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Gammafunktion

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$

$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{n!\, 2^{2n}}$

Allgemeine Gleichung 3. Grades

$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

$q = \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{9} a_2^2$

$p = \frac{1}{6}(a_1 a_2 - 3 a_0) - \frac{1}{27} a_2^3$

$s_1 = \sqrt[3]{p + \sqrt{q^3 + p^2}}$ $\quad s_2 = \sqrt[3]{p - \sqrt{q^3 + p^2}}$

$x_1 = s_1 + s_2 - \frac{1}{3} a_2$

$x_{2,3} = -\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{1}{3} a_2 \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2)$

Quotientenregel

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$

Substitution

$\int f(y)\, dy = \int f(g(x))\ \ g'(x)\, dx$

Partielle Integration

$\int f\, g = F\, g - \int F\, g'$

Funktion und Ableitung

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$

Tabellen

F(s)	f(t)
$\frac{1}{s - a}$	e^{at}
$\frac{1}{s(s - a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$

$\frac{1}{(s-b)\,(s-a)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	sin(a t)
$\frac{a}{s^2-a^2}$	sinh(a t)
$\frac{s}{s^2+a^2}$	cos(a t)
$\frac{s}{s^2-a^2}$	cosh(at)
$\frac{s}{(s-b)\,(s-a)}$	$\frac{a\,e^{at}-b\,e^{bt}}{a-b}$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t\,e^{at}$
$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{t^2}{2}\,e^{at}$
$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\sin(a\,t)$
$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos(a\,t)$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$t^n\,e^{-at}$

Funktion	**Ableitung**
a^x	$a^x \ln(a)$
sin(x)	cos(x)
cos(x)	-sin(x)
tan(x)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
x ln(x) - x	ln(x)
$\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin(2\,a\,x)$	sin²(a x)
$\frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\sin(2\,a\,x)$	cos²(ax)

Trigonometrie

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Hydrodynamik

Fluid mit 5 makroskopischen Größen beschreibbar:

$\vec{u}(\vec{x},t)$; $P(\vec{x},t)$, $\rho(\vec{x},t)$

$[P = f(\rho,T)]$

Kontinuitätsgleichung:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = 0$ (quellfrei)

Mit Quellen/Senken q → $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = q$

Newton 2 für Flüssigkeit: $-\vec{\nabla}P = \rho\frac{d\vec{u}}{dt}$

Eulergleichung:

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{1}{\rho}\vec{F}_{ext}$

$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{u}) - \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})) = 0$ (wenn S = const.)

1. HS der Thermodynamik:

$dE + p.DV = \delta Q$

$\delta Q = T.dS$; $dP = \rho.dw$; $H = E + P.V$

Enthalpie pro Massendichte: $w = E + \frac{P}{\rho}$

Hydrostatische GGW:

$P(z) - P(z_0) = -\rho_0 g(z - z_0)$

Gibb'sche freie Enthalpie: $G = H - T.S$

Allg. Gasgleichung: $P.V = n.R.T$

Auftriebskraft:

$\vec{F}_A = \rho_{Fl} g V_K \hat{e}_z = M_{Fl,K} g \hat{e}_z$

Poisson-Gleichung: $\Delta\Phi(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x})$

Bernoulli-Gleichung:

$\frac{1}{2}u^2 + E + \frac{P}{\rho} + gz = const$

stationärer Strömung:

$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u}\vec{\nabla}\vec{u} =_{Kugelsymmetrie} \vec{u}\frac{d\vec{u}}{dr}$

Energiestrom: $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho E$

Energiestromdichtevektor:

$\vec{\chi} = \rho\vec{u}(\frac{1}{2}u^2 + E + \frac{P}{\rho})$

Massenfluss = Massenstromdichte : $\rho\vec{u}$

Impulsstrom: $\vec{p} = \rho\vec{u}$

Impulsstromdichtetensor:

$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho u_i u_k$

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = -\partial_k \Pi_{ik}$;

$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{u}) = 0$

Zirkulation: $\Gamma = \oint_C \vec{u}.d\vec{l}$

Wirbelstärke: $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$

Freie Fallzeit: $\tau_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}$

Clausiusches Virial:

$2\left\langle E_{kin}\right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\vec{r}_i \right\rangle = \frac{1}{\tau}(G(\tau) - G(0))$

Virialtheorem: $\left\langle E_{kin}\right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\vec{r}_i \right\rangle$

Thermodynamik: $E_{gas} = \frac{f}{2}N.k_B.T$

Boyl'sches Gesetz: $P.V = N.k_B.T$

Eddington-Leuchtkraft:

$L_E = \frac{4\pi.G.M.m_P.c}{\sigma_T} = 10^{4,5}(\frac{M}{M_\square})L_\square$

Thomsonquerschnitt: $\sigma_T = \pi r^2{}_e$

Selbstenergie des Elektrons: $r_e \approx \frac{e^2}{m_e c^2}$

„Strahlungsdruck":

$f_{rad} = \frac{dp}{dt} = \frac{\dot{E}}{c} = \frac{L}{c} = \frac{\sigma_T L}{4\pi R^2 c}$

Virialsatz für Zentralkraft:

$2\left\langle E_{kin}\right\rangle + \left\langle V_{pot}(r)\right\rangle = 0$

Gravitationsradius:

$r_g = \frac{GM^2}{\left|V_{pot}\right|} = \frac{5}{3}R_0 \approx \frac{r_H}{0,4}$

$\left\langle v^2\right\rangle = \frac{GM}{r_g}$

Gegendruck einer kollabierenden Gaswolke:

$\bar{P} = -\frac{1}{3}\frac{E_{grav}}{V}$

Potentialströmung: $\vec{\nabla}\vec{u} = 0 \rightarrow \Delta\varphi = 0$

Schallgeschwindigkeit:

$c_s = \sqrt{(\frac{\partial P}{\partial\rho})_S} = \sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}}$

Adiabatenexponent: $\gamma = \frac{f+2}{f}$; isotherm: $\gamma = 1$

Druck und Ionisationsgrad:

$P = nk_B T(1+\chi)$

Ionisationsgrad: $\chi = 0$ □ keiner; $\chi = 1$ □ vollst.

$\rho = n\bar{m}$; n…Teilchendichte; $\bar{m}$: Masse/Teilchen

Dispersionsrelation:

$\omega^2(k) = k^2 c_s{}^2 - 4\pi G\rho$

Jeanslänge: $\lambda^2{}_j = \frac{\pi c_s{}^2}{G\rho_0}$

Jeansmasse:

$M_j = \frac{4}{3}\pi\rho_0(\frac{1}{2}\lambda_j)^3 = \frac{1}{6}\pi\rho_0(\frac{\pi c_s{}^2}{G\rho_0})^{3/2}$