

1)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 1/3 \\ x_2 &= -2/3 \\ x_1 &= 4/3 - 3/3 + 1 = 1 + 1/3 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= 1 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Zuflusswerte

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3}{2} \\ x_2 &= 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 0.5 \\ 2x_1 &= 0 - \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$x_1 = 0.5$
 $x_2 = 1.5$
 $x_3 = 1.5$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ -\frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= 1 \\ x_2 + 5x_3 + 0 &= -1 \\ 6x_2 + 0 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 + 0 &= -1 \\ -30x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 14x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= -1.5 \\ 11.9x_4 &= -\frac{17}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -6x_2 + 6x_3 &= -1 \\ -2.5x_2 - 12.5x_3 &= \frac{5}{2} \\ 14x_3 - \frac{13}{30}x_4 &= \frac{28}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= -\frac{17}{57} \\ x_3 &= \frac{\frac{17}{57} - 1.5}{14} = -\frac{47}{349} \\ x_2 &= -5 \cdot \frac{47}{349} - 1 \\ x_2 &= -\frac{264}{349} \\ x_1 &= \frac{\frac{164}{349} - \frac{47}{349} - \frac{17}{57}}{2} = \frac{1}{349} \end{aligned}$$

4)

$$z_1 + i z_2 + (2-i) z_3 = 2+i$$

$$\textcircled{1} -(-1)z_2 + z_3 \frac{(3-i-3-i)}{2i+3} = 1-2i$$

$$\left[(1+i)z_2 + z_3 \frac{(4+8i-2i+4)}{8+6i} = 4+3i \right]$$

$$z_3 \cdot (1+6i - \frac{5+i}{1-i}) = 1+3i$$

$$(1+i)z_2 + (i-1)z_3 + (2-i+2i-i^2)z_3 = 2+i+2+i^2 = 1+3i$$

$$-2z_1 - 2iz_2 - (4-2i)z_3 = -4-2i$$

$$(1+i)z_2 + z_3 \frac{(2i-3) \cdot (1+i)}{-(i-1)} = \frac{(1-2i) \cdot (1+i)}{-(i-1)}$$

$$\frac{2i-3-2-3i}{-(i-1)} = \frac{+5+i}{i-1} \quad \frac{1-2i+2-i}{-(i-1)} = \frac{3-3i}{1-i} = 3$$

$$z_3 = \frac{1+3i}{\frac{8i-9-6i-5-i}{i-1}} = \frac{i-3-1-3i}{1-19} = \frac{-2i-4}{-1+19} = z_3$$

$$-(i+1)z_2 = -\frac{2i+4}{19-i} \cdot \frac{(2i-3)}{1-i} = 1-2i$$

$$(4-i)z_2 = \frac{+4+8i+6i+12-19+i-38i-2}{(19-i) \cdot (1-i)}$$

$$\frac{-37-35i}{19-i-1-i} = \frac{-37-35i}{18-20i}$$

$$\textcircled{2} = \frac{-5-39i}{18-20i} = z_2$$

$$z_1 = \frac{+5i-39}{18-20i} - (2-i) \frac{2i+4}{19-i} + 2+i$$

$$z_1 = \frac{5i-39}{18-20i} - \frac{4i+8+2-i+39-2i+19i+1}{19-i}$$

$$z_1 = \frac{647i - 1927}{3220 - 398i}$$

$$z_1 = \frac{99i - 741 + 5 + 39 - 378i - 810 - 420 + 408i}{342 - 18i - 380i - 20}$$

5)

$$ax_1 + bx_2 = c$$

$$\left(d - \frac{bc}{a}\right)x_2 = A - \frac{dc}{a}$$

$$cx_1 + \frac{cb}{a}x_2 = \frac{Ac}{a}$$

$$x_2 = \frac{A - \frac{dc}{a}}{b - \frac{bc}{a}}$$

$$x_1 = \frac{A - \frac{dc}{a}}{d - \frac{bc}{a}}$$

$$x_2 = \frac{A - \frac{dc}{a}}{d - \frac{bc}{a}}$$

$$x_1 = \frac{A - \frac{dc}{a}}{d - \frac{bc}{a}}$$

Ref

$$d - \frac{bc}{a} < 0$$

$$d < 0$$



6a) Gerade in $\mathbb{R}^2$ durch Vorgehen

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6b) Ebene in $\mathbb{R}^3$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6c) Gerade (schneiden) in $\mathbb{R}^3$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2 + 5x_2 + 8x_3 = 0$$

$$-9 - 16x_2 - 8x_3 = 0$$

$$-6 - 11x_2 = 0$$

$$x_2 = -\frac{6}{11}$$

$$1 - \frac{12}{11} = -x_3$$

$$\frac{1}{11} = x_3$$

$$-3 = -4x_3$$

$$\frac{3}{4} = x_3$$

$$4 = -4x_3$$

$$-1 = x_3$$

7)

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind nicht ident., parallel

damit ~~ausreichend~~ falsch ist müssen sie komplanar sein

↓
wenn komplanar müssen alle den selben Normalenvektor $(\perp)$ haben

$$\vec{a} \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 3-4 \\ 6-4 \\ 12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 3-6 \\ -3+3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{a} = \vec{b}$ oder $\vec{a} = \vec{c}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{z}$$

8) a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{aligned} & u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = \\ & = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ & = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9)

$$A, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 15 & 16 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow n=2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow n=3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow n=4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow n=5$$

$k \in \mathbb{N}, k \geq 0$

$$\begin{aligned} & k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{k_1+2} \bmod 4 = 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{k_2+1} \bmod 4 = 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{k_3} \bmod 4 = 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{k_4-1} \bmod 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{k_4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n=2 \quad B^n = B^{n-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n=3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$n=2$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

$$n=9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n=3$

$$k_1 + 1 \bmod 3 = 0$$

$$k_2 \bmod 3 = 0$$

$$k_3 - 1 \bmod 3 = 0$$

$$n=10 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n=4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{k_1} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k_2} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n=11 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n=5 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{k_3} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$n=6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n=7$

e)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n=8$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n=2$

$$\forall n > 2: \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n=3$

11)

$$M_{n \times n} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot e & 0 \\ 0 & 0 & c \cdot f \end{pmatrix}$$

$$D_1 \cdot D_2 = D_3$$

$$D_1, D_2, D_3 \in M_{n \times n}$$

$$D_3 = (c_{ij})_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_n \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}_n \leftarrow \text{gemäß Angabe}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a_{ij} \cdot b_{ij} & i = j \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} & 0 \\ a_{31}b_{11} & a_{32}b_{22} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$E = (c_{ij})_n$$

$$c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ji}$$

$$M \cdot D = E$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ (a_{ij})_n & (b_{ij})_n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{bei } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\ b_{ji} \end{matrix}$$

12)

$$9) A(B+C) = AB+AC$$

$$a_{ij} \quad b_{kl} \quad c_{pq}$$

~~10)~~

$$A = M_{y \times z}$$

$$B, C = M_{z \times m}$$

$$A \cdot (b_{kl} + c_{pq}) \stackrel{k=p}{\underset{l=q}{=}} \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{kl} + c_{kl}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{kl} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{kl}$$

$$\sum_{i=1}^y a_{ij} (b_{kl} + c_{kl})$$

$$\sum_{i=1}^y a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^m (b_{kl} + c_{kl}) \right) = \sum_{i=1}^y \left(\sum_{k=1}^m a_{ij} (b_{kl} + c_{kl}) \right)$$

$$AB + AC = \sum_{i=1}^y a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^m b_{kl} \right) + \sum_{i=1}^y a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^m c_{kl} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^y a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^m b_{kl} + \sum_{k=1}^m c_{kl} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^y a_{ij} \cdot (b_{kl} + c_{kl})$$

b)

$$A \cdot (\lambda \cdot B) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \sum_{k=1}^p \lambda b_{kl}$$

$$A = M_{n \times m}$$

$$B = M_{m \times p}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a_{ij} \quad b_{kl}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} \cdot \lambda \cdot b_{kl}$$

$$\lambda (A \cdot B) = \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \sum_{k=1}^p b_{kl} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} \lambda b_{kl}$$

13)

a)

~~Produkt hat die selbe Gestalt~~

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & * \\ 0 & 0 & * & + \end{pmatrix}$$



b)

~~(A+B)~~

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_2 & A_1 B_3 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_2 & A_3 B_3 + A_4 B_4 \end{pmatrix}$$

$$2 \times n$$

E

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}}_{1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq r} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^n a_{ij} b_{jk}}_{A_2 B_3}$$



14

$$M \cdot (M \cdot M) = (M \cdot M) \cdot M$$

~~$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$~~

~~$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$~~

~~$$\begin{pmatrix} \cos^3(\alpha) - \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha)\sin(\alpha) + \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin^3(\alpha) + \cos^3(\alpha) \end{pmatrix}$$~~

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+ad \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+abc+ca^2+abd & a^2b+ab^2+cb^2+abd \\ ca^2+bc^2+cad+d^2c & abc+ad^2+cbd+d^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^3+abc+ca^2+abd & a^2b+ab^2+cb^2+abd \\ ca^2+bc^2+cad+d^2c & abc+ad^2+cbd+d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+2abc+acd & a^2b+b^2d+b^2c+d^3 \\ ca^2+bc^2+cad+d^2c & abc+ad^2+cbd+d^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^3(\alpha) + 2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha)\sin(\alpha) + \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)\sin(\alpha) & -\cos^3(\alpha) + \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^3(\alpha) + \sin^2(\alpha) - 2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) \\ -3\sin^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) & \cos^3(\alpha) + \cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+cb & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^3+abc+dbc+bcd & a^2b+cb^2+abd+bd^2 \\ a^2c+acd+c^2b+cd^2 & abc+c^2d+cdb+d^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^3(\alpha) + \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) & -\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) + \sin^3(\alpha) \\ \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) + \cos^3(\alpha) & -\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

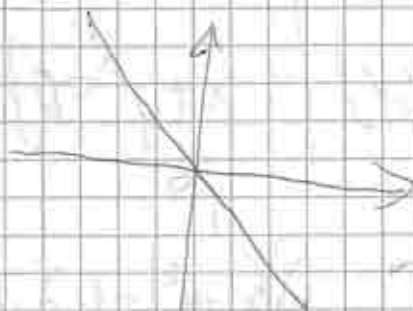
$$V^x = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

16) a) $\{(x,y) \mid x+y=0\}$



$\lambda(x+y)=0$

$x_1+y_1=0 \quad x_2+y_2=0$

$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) = 0$ ✓

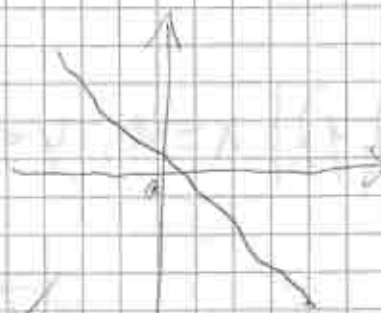


b) $\{(x,y) \mid x+y=0\}$

$\lambda(x+y)=\lambda$ ✗

$\lambda x + \lambda y = \lambda$

$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) = 1$ ✗



c) $\{(x,y) \mid x=0, y \geq 0\}$



$x\lambda=0$ ✓

$y\lambda \geq 0$ ✗ $\lambda < 0$

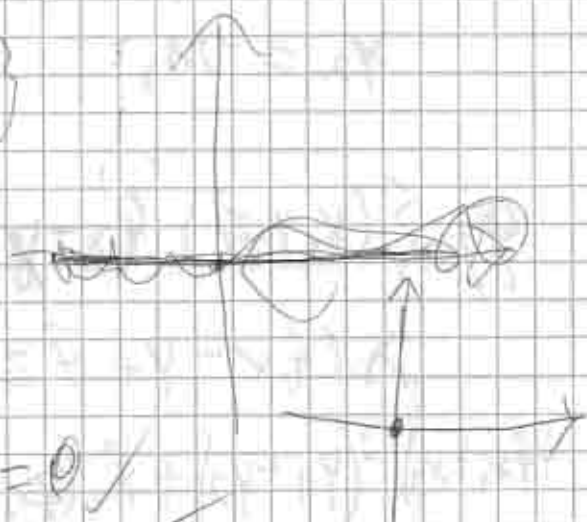
d)

$\{(x,y) \mid x+y=0 \wedge x-y=0\}$

$\downarrow$
 $x=0 \quad y=0$

$\lambda(x+y)=0$ ✓

$\lambda(x-y)=0$ ✓



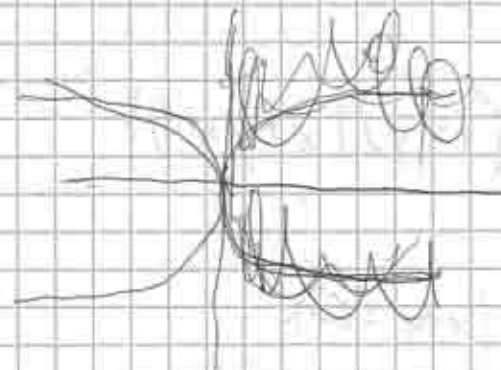
$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) = 0$ ✓

$(x_1-x_2) - (y_1-y_2) = 0$ ✓

9)

$$\{(x, y) \mid x + y^2 = 0\}$$

$$\lambda(x + y^2) = 0, \lambda \neq 0$$



$$(x_1 + y_1^2) = 0$$

$$(x_2 + y_2^2) = 0$$

$$(x_1 + x_2) + (y_1^2 + y_2^2) = 0$$

$$y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = 0$$

$$4) \{(x, y) \mid x = 3t, y = -2t, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda x = 3t\lambda$$

$$\lambda y = -2t\lambda$$

$$x_1 = 3t_1$$

$$y_1 = -2t_1$$

$$x_2 = 3t_2$$

$$y_2 = -2t_2$$



$$x_1 + x_2 = 3(t_1 + t_2)$$

$$y_1 + y_2 = -2(t_1 + t_2)$$

$$9) \{(x, y, z) \mid 4x - y + 7z = 0\}$$

$$\lambda(4x - y + 7z) = 0$$

$$4(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 7(z_1 + z_2) = 0$$



1) $\begin{cases} x+2z=0 \\ y=0 \end{cases}$



18) $U_1 = U_2$

$w \in W$
 $u_1 \in U_1$
 $u_2 \in U_2$

$U_1 \neq U_2$

$U_1 + W \neq U_2 + W$

$w + u_1 = u_2 + w$

$U_1 + W = U_2 + W$

$(u_1 \oplus u_2) \oplus (w_A \oplus w_B) =$

$(u_1 \oplus u_2) \oplus (w_A \oplus w_B)$
 $\oplus^1 = \oplus^2 \Rightarrow U_1 = U_2$



$Q + R = R + R = U_1 \neq U_2$

17) a) $\{p \mid p(1) = p(2)\}$ ✓

$p(1) = p(2)$

b) $\{p \mid p(1) = p(2) + 1\}$ ✗

c) $\{p \mid p(0) = 1\}$ ✗

$$d) \{p \mid p(1) \leq 0\} \quad \times$$

$$e) \{p \mid \deg(p) = 3\} \quad \times$$

$$f) \{p \mid p''(1) = 0\} \quad \checkmark$$

$$g) \{p \mid p''(1) = -1\} \quad \times$$

$$h) \{p \mid \int_0^1 p(t) dt = 0\} \quad \checkmark$$

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = 0$$

$$a_3 \neq 0$$

← kann durch Ableiten vereinfachen

$$14) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & bf \\ cg & dh \end{pmatrix} \quad \text{nein}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cg & af+ch \\ be+dg & bf+dh \end{pmatrix}$$

inversen

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) & -\cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) & -\cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

15)

$$l_\infty(\mathbb{R}) = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R} \mid |a_i| \leq N$$



$$l_\infty + l_\infty = (a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) = \\ = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots) \quad |a_i + b_i| \leq N$$

$$\lambda l_\infty = \lambda (a_1, a_2, a_3, \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \dots)$$

19) $\forall v, w \in V$

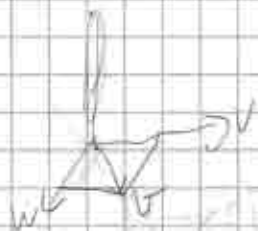
$$U \cap W = \{0\} \Rightarrow \forall (u \in U, w \in W) / 0 : u \neq w$$

$$\Rightarrow u \neq w$$

$$u \in U \cap W$$

$$u = u + w$$

$$\forall u \in U \nexists w \in W : u = w$$



$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(x) = f(x)$$

$$\frac{2f(x) - f(x) + f(x)}{2} = f(x)$$

$$f(u) = p(x) + v(x)$$

$$f(-x) = p(-(-x)) - q(-x) = p(x) + q(x)$$

$$f(f(-x)) = f(-f(x))$$

$$f(-x) = p(x) \quad \text{and} \quad g(x) = u(x)$$

~~$f(f(x)) = f(-f(x))$~~

$$f(x) - f(-x) = 2g(x) =$$

$$f(x) - f(-x) = 2g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$f(x) - f(-x) = 2v(x)$$

$$v(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$k_1 = \frac{y_1 + y_2}{0 + 0}$$

$$= P(Y_1) - P(Y_2)$$

$$\phi(3x_1 - 2y_1 + 3x_2 - 2y_2) = \phi(3x_1 - 2y_1) + \phi(3x_2 - 2y_2)$$

$$\Delta_y p(\lambda y) e^{-\lambda y} = \lambda \phi(y)$$

$$g(3x-2y) = 2g(3x-2y)$$

$$Q(\lambda y) = \lambda Q(y)$$

$$q(3\lambda x - 2) \neq \lambda q(3x - 2)$$

$$4) \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\cancel{P(X_1^2 + X_2^2)} = P((Y_1 + Y_2)^2) \neq P(Y_1^2) + P(Y_2^2)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{d) } \cancel{\varphi}(p_1 + p_2)'' - \cancel{\varphi}(p_1 + p_2)' - p_1 + p_2 = \cancel{\varphi}(p_1'' - \cancel{\varphi}p_1' + p_2 + p_2'' - \cancel{\varphi}p_2' + p_2) \\
 & = \cancel{\varphi}(p_1'' - \cancel{\varphi}p_1' + p_1) + \cancel{\varphi}(p_2'' - \cancel{\varphi}p_2' + p_2) \\
 & \quad \cancel{\varphi}(\lambda p)'' - \cancel{\varphi}(\lambda p)' + \lambda p = \lambda \cancel{\varphi}(p'' - \cancel{\varphi}p' + p) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \cancel{\varphi}(p(x_1 + x_2 + 1)) \neq \cancel{\varphi}(p(x_1 + 1)) + \cancel{\varphi}(p(x_2 + 1)) \quad \times$$

$$\text{f) } \cancel{\varphi}(p(3x))$$

$$\cancel{\varphi}(p(3x_1 + x_2)) = \cancel{\varphi}(p(3x_1)) + \cancel{\varphi}(p(3x_2)) \quad \checkmark$$

$$\cancel{\varphi}(p(3x)) = \lambda \cancel{\varphi}(p(3x))$$

$$\text{g) } \cancel{\varphi}(u + v)$$

$$\cancel{\varphi}(u_1 + u_2 + u_3) \neq \cancel{\varphi}(u_1 + u_2) + \cancel{\varphi}(u_3 + u_3)$$

$$22)$$

$$\cancel{\varphi}(\cancel{\varphi}z) = z \quad \text{and} \quad \cancel{\varphi}(\cancel{\varphi}z) = z$$

$$\begin{aligned}
 \overline{a+bi+ci} &= \overline{a+bi} + \overline{c+di} \\
 \text{so } \cancel{\varphi}(\cancel{\varphi}(a+bi)) &= a-bi + c-di = a+ci-bi-dc = a+ci-bd-dc
 \end{aligned}$$

$$\cancel{\varphi}(\cancel{\varphi}z) = \cancel{\varphi}(\cancel{\varphi}z) \quad \checkmark$$

$$23)$$

$$\text{SPR is linear} \quad \text{für } \phi \in \text{Nicht-ONE 1A}$$

$$\text{für } \phi|_{u_1} \neq \phi|_{u_2}$$

$$\begin{aligned}
 & \uparrow \\
 & u_1 \neq u_2 \Rightarrow u_1 \neq u_2 \\
 & \Rightarrow \phi|_{u_1} = \phi|_{u_2} \Rightarrow u_1 = u_2
 \end{aligned}$$

$$24) a) \textcircled{0}: (x, y, z) \mapsto (x, y, \textcircled{0})$$

$$\psi: (x, y) \mapsto (y, x)$$

$$\psi(w) = Bw$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

B w $\psi(w)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \phi(v)$$

$$b) \textcircled{x} \textcircled{y} \textcircled{0}$$

$$\phi(x, y, 0)$$

$$\psi(y, x, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

25)

4) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 2 & 5 & 8 & | & 0 \\ 3 & 6 & 9 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -12 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

$k_1, k_2, k_3: \text{b. a.}$
 freies Parameter

0) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 8 & | & 0 \\ 3 & 9 & 27 & | & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 24 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$6k_3 = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

26)

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = 0$$

$$v_i = \frac{1}{\lambda} (\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n)$$

0 0

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0$$

$$\lambda_1 = -(\lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1})$$

$$\lambda \cdot (\lambda_1 - \lambda_n) = (\mu_2 - \mu_n)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda = \frac{\mu_n}{\lambda_n}$$

ist entweder λ_i oder μ_i gleich Null so sind bestimmte λ_i bzw μ_i

$$v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = -\frac{1}{\mu_1} (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) \quad \frac{\lambda_i}{\lambda_1} = \frac{\mu_i}{\mu_1}$$

$i = 2, \dots, n$

$$\frac{\lambda_i}{\mu_1} = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right) \forall i = 2$$

$$\mu_i = \lambda_i \mu_1 \quad i = 2, \dots, n$$

27

$$\{\log(p) \mid p \text{ prim}\}$$

p ist eine Primzahl

$$\sum q_i \log(p_i) + \dots + q_n \log(p_n) = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = 0$$

Sup. bzw.

$$q_j \log(p_j) = \sum_{i \neq j} q_i \log(p_i)$$

$$\dim(R:Q) = N$$

in Folge die Menge $(\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n + 1)$ ist l. a.

also nicht $x_j = \log(p_j)$

$$\log(p_j^{q_j}) = \log\left(\prod_{i \neq j} p_i^{q_i}\right)$$

$$p_j^{q_j} = \prod_{i \neq j} p_i^{q_i}$$

ist aber l. w. wenn $\dim(R) = \infty$

$$\sum q_i \log(p_i) = 0 \Rightarrow \prod p_i^{q_i} = 1$$

$$\dim(R) = \infty$$

weil $\prod p_i^{q_i} = 1$ und können zeigen dass $\prod p_i^{q_i} = 1$ ist (Kann man zeigen?)

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{q_i} = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{q_i}$$

nicht möglich

weil Primfaktorzerlegung ist eindeutig

(weil Exponenten pos.)

$$p_j^{q_j} = \frac{1}{p_j^{q_j}}$$

kein $p=1 \Rightarrow 1 \notin \text{prim}$

$$\Rightarrow q_j = 0$$

$$q_i = \frac{q_i}{p_i}$$

$$\sum q_i \log(p_i) = 0$$

$$\Rightarrow \prod p_i^{q_i} = 1$$

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{q_i} = 1$$

25)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \text{l.u.}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \text{l.u.}$$

26)

$$n-1 \rightarrow \text{l.u.} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

$$\text{für } n=1 \text{ bzw. } n-1 \text{ l.u.} \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 0$$

$$\lambda = 0$$

28)

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ linear } \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{l.u. } \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad x = -\frac{2\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$-3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{mit Einsetzung von } y = -\frac{3\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\text{b) } \text{linear } \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 & y & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 3 & -2 & z & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

oder Transposition

3A) $W = \text{Ebene in } \mathbb{R}^3$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ~~$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$~~

3A) ~~$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$~~ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

v_2, v_4

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 1x_4 &= 0 \\ -1x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 1x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 + v_4 \\ v_3 &= 2v_1 + v_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 0 \end{array}$$

$$3x_1 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \quad (25)$$

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$

$$3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 25$$

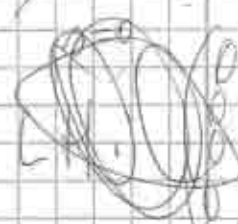
$$x_2 + 2x_3 - 1x_4 = -15$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 25 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & 10 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} -1 \quad 4 \quad -1 \quad 2 &= b \\ -9 \quad 3 \quad -1 &= a - 2b \\ v &= c - 4b - a + 2b \\ v &= d - b - a + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 2 & b \\ 4 & 7 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & -1 & a-2b \\ 0 & -9 & 3 & -1 & -2b \\ 0 & -9 & 3 & -1 & b-b \end{array}$$



32)

~~32a)~~ ~~$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$~~

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

from $\ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $x_4 = t_1$
 $x_3 = t_2$
 $x_2 = t_3$
 $x_1 = 2t_3 - 3t_2 - t_1$

$\dim(\ker(\varphi)) = 3$

$\Rightarrow \ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(\varphi) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\dim(V) - \dim(\ker(\varphi)) = \dim(\text{im}(\varphi))$

$\dim \text{im}(\varphi) = 1$

32b) $x_1 - 2x_2 - 1x_3 = 0$

$x_1 + x_3 = 0$

~~$x_1 = -x_3$~~

$\ker(\varphi) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$x_1 = -x_3$

$-x_2 - 2x_3 - x_1 = 0$

$-x_2 - 2x_3 = x_1$
 $-x_2 = x_1 + 2x_3$
 $-1 \quad 1 \quad 2$
 $1 \quad 0 \quad 0$

$\text{im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$

33)

21a)

$y = 0$

$0 = 0$

$3x - 2y = 0$

$x = 0$

$\ker \varphi_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\text{im } \varphi_1 = \left(\begin{pmatrix} y \\ 3x - 2y \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2$

$y = 1 \cdot 1$

$x = 1 \cdot 2$

21b)

$\varphi^3 = \varphi^2 = \varphi = 0$

$\ker(\varphi) = \{0\}$

$\text{im}(\varphi) = \mathbb{P}(\mathbb{R})$

~~$\text{im}(\varphi) = \mathbb{R}(\mathbb{R})$~~

$Q(x) = p(x) + 7p'(x) + p''(x)$

$a_0 = p_0 + 7p_1 + 2p_2$

$a_1 = p_1 + 14p_2 + 6p_3$

$a_2 = p_2 + 7p_3$

21c)

$\ker = \left(\begin{pmatrix} 0(0) \end{pmatrix} \right)$

$\text{im} = \mathbb{P}(\mathbb{R})$

29)

$$f: x \mapsto \cos(x)$$

$$g: x \mapsto x^2$$

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 \neq 0$$

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 x^2 = 0$$

$$\cos(x) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x^2$$

$$1 \neq 0$$

$$x=0$$

$$\lambda_2 \neq 0 \quad x^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cos(x)$$

$$\frac{\pi^2}{4} \neq 0$$

32)

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\ker(\psi) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(\psi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

35a)

$$A \cdot x = 0$$

$$A \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow A^T x = A^T A x = 0$$

$$= 0 \quad A^T x = 0$$

$$A \cdot A^T x = 0$$

$$A^T x = b$$

$$A^T (A \cdot x) = 0$$

33) 21e $\ker(\varphi) \in p_0$

$\dim(\varphi) = \dim P(R)$

37) $\varnothing \subset U \subset V$ Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim(U) = n-1$

$D : \text{Basis} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim(D) = 1$

$U \cap D$ Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim(U \cap D) = 0$

$U + D$ Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim(U + D) = n$

38) $V = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \cup \dots \cup U_n$ $= \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq U_1 \cup U_2$

$V \cup V = V$ wenn $U_i = V$

$V \cup X = V$ $V = V \cup \varnothing \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$

$X \subseteq V$

da also $U_i \subseteq V$

$V = \bigcup_{i=1}^n U_i$ mit $U_i \neq V$

$U_i \neq V \Rightarrow \exists x \notin U_i$

$V = V$ w. A.

$V = \bigcup_{i=1}^n U_i$

39) $\varphi: U_n \rightarrow V \quad \forall \lambda \in R \quad x + \lambda u_1 \notin U_1 \Rightarrow \forall \lambda \exists i \geq 2: x + \lambda u_i \in U_i$

$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{im}(\varphi))$

$\dim(V) \neq \dim(V)$

$\ker(\varphi) = \text{im}(\varphi)$
 $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(\text{im}(\varphi))$

U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
$x + u_2$	$x + u_3$	$x + u_4$	$x + u_5$	$x + u_6$
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

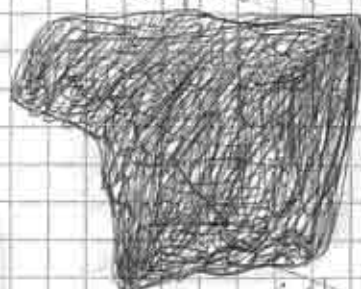
40)

$$A = V + W$$

$\downarrow$
 $\in \mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x + y = A$$

$$a + b + c = 0$$



Def Ebene $\mathbb{R}^3$



$$ax + by + cz = x + y + z$$

$$a + b + c = 0$$

$$\dim(A) = 2$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def Ebene $\mathbb{R}^3$
 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + by + cz$
 $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$
1. Basis
2. Basis
3. Basis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + by + cz$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \mu_2 - 4\mu_3$$

$$\mu_2 = -3w_1 + 4w_2 - 4w_3$$

$$w_2 = \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3$$

$$\mu_1 = w_2 + 3w_1 - 4w_2 + 4w_3 - 2w_1 + 2w_2 - 2w_3$$

$$w_3 = \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3$$

$$\mu_1 = w_1 - 2w_2 + 3w_3$$

$$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 - w_3 = \mu_2 - 3\mu_3$$

$$w_2 - w_3 = w_1 + 4\mu_3 - 3\mu_3$$

$$-w_1 + v_2 - w_3 = \mu_3$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$$

$$v_2 = -\lambda_1 + 3\lambda_2$$

$$\lambda_1 = 3\lambda_2 - v_2$$

$$v_1 = 6\lambda_2 - 2v_2 + \lambda_2$$

$$\lambda_2 = -\frac{v_1}{7} - \frac{2v_2}{7}$$

$$\lambda_1 = \frac{3v_1}{7} - \frac{13v_2}{7}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{13}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3$$

$$\Phi_A: V \rightarrow V$$

$$\Phi_B: W \rightarrow W$$

$$A \rightarrow B$$

$$\Phi$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{13}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 64 & -14 \\ -30 & 13 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{3}{7} & -\frac{13}{7} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cc|cc} -3 & -13 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 7 \end{array} \quad \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 3 & 13 & 7 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}$$

$$C^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -13 \\ -2 & 6 \\ -5 & -23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -13 \\ -2 & 6 \\ -5 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -99 \\ 19 & 155 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

63 + 92

43)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

44)

$$AB = BA$$

$$AB \cdot A^{-1} = \underbrace{BAA^{-1}}_I$$

$$\underbrace{B \cdot A \cdot A^{-1}}_I$$

$$B = B \quad \square$$

$$A^{-1}BA = \underbrace{BA^{-1}}_I \underbrace{A}_I$$

$$B = B \quad \square$$

45)

$$(I_n - A) \cdot (I_n - A)^{-1} = I_n$$

$$A^k = 0 \Rightarrow A = (a_{ij})$$

$$\forall a_{ij} : i = j \quad a_{ij} = 0$$

$$I_n - A = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-a_{12} & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

46) ~~geg. $a_1, a_2, \dots, a_n$~~

~~$\text{MSP} = \dim(\text{Ker}(A_1, \dots, A_n))$~~

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

alle Zeilen sind gleich

$a_1, \dots, a_n \neq 0 \Rightarrow \text{EV} = \sum_{j=1}^n a_j$

~~l.o.~~
~~Nullvektor~~

$\text{MSP}(A_1, A_2) = 1$

48)

$(I + A + A^2 + \dots + A^n)(I - A) = I - A^{n+1}$

$(I + A + \dots + A^{n-1})(I - A) = I - A^n$
 $\uparrow$
 $= 0$

47)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$< \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 4 & 1 \end{array}$$

$= 8$
 $\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}$$

48)

$$1 \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \frac{1}{x} = 0-1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→

dark night

49)

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 & -18 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -18 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$50) \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-4) \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ -1 - 4 + 8 - 2 = 1$$

$$b) \det \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 12 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -3 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (-14 + (-20) - 8 + 3 - 4 + 2) = -41$$

$\prod_{i < j} (x_i - x_j)$
 $\det \begin{pmatrix} 1-x & x^2-x^3 & x^2-x^3 \\ 1-y & y^2-xy & y^3-xy^2 \\ 1-z & z^2-xz & z^3-xz^2 \\ 1-A & A^2-xA & A^3-xA^2 \end{pmatrix}$
~~verschwindet nur wenn $x=y=z=A$~~
 $x \neq y \neq z \neq A$

$$= \det \begin{pmatrix} y-x & y^2-xy & y^3-xy^2 \\ z-x & z^2-xz & z^3-xz^2 \\ A-x & A^2-xA & A^3-xA^2 \end{pmatrix}$$

$A=0$ wenn
 $x=y=z=A$

$$= (y-x)(z^2-xz) \cdot (A^3-xA^2) + (y^2-xy) \cdot (z^3-xz^2) \cdot (A-x) + (y^3-xy^2) \cdot (z-x) \cdot (A^2-xA) \\ - (y^2-xy^2) \cdot (z^2-xz) \cdot (A-x) - (y^3-xy^3) \cdot (z-x) \cdot (A^2-xA^2) - (y-x) \cdot (z^3-xz^2) \cdot (A^2-xA^2)$$

$$= ((yz^2 - xzy - xz^2 + x^2z)(A^3 - xA^2) + (y^2z^3 - xy^2z^2 - xy^2z^2 + x^2yz^2)(A-x) + \\ + (y^3z^2 - xy^3z - xy^3 + x^2y^2)(A^2 - xA) - (y^3z^2 - y^3xz - xy^2z^2 + x^2y^2z)(A-x) - \\ - (y^3z - y^2x + x^2y - xy^2z) \cdot (A^3 - xA^2) - (y^2z^3 - yxz^2 - xz^3 + x^2z^2)(A^2 - xA^2))$$

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\varphi} & W \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & K
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \varphi \in W^* \\
 \text{for } \varphi \in V^*
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{\varphi^*} & V^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K & \xrightarrow{\quad} & K
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\quad} & W \\
 \downarrow \varphi_B & & \downarrow \varphi_C \\
 R & \xrightarrow{(\varphi)_B} & R
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{\varphi^*} & V^* \\
 \downarrow \varphi_B & & \downarrow \varphi_C \\
 [(\varphi)_B]_{R^*} & & [(\varphi)_C]_{R^*}
 \end{array}$$

8)

$$x_1^2 - 2x_2^2 = \text{~~... ..~~}$$



mit e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2x_2^2 = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$

63)

$$\text{Basis} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

53)

$$A = (a_{ij})$$

$$\det A(a_{ij}) = \det ((-1)^{i+j} a_{ij})$$

Grundrechenregeln
Jacobi
nach Elementen
in Diagonalen

$$\begin{pmatrix} a_{11} - a_{12} & 0 & 0 \\ -a_{21} & a_{22} - a_{23} & 0 \\ a_{31} - a_{32} & 0 & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{1+1} = 1$$

$$i=1 \quad \det B_{11} = \det(A_{11})$$

$$i=2 \quad \det B_{21} = (-1)^{1+2} \det(A_{12})$$

$$\det B_{31} = (-1)^{1+3} \det(A_{13})$$

$$\det B = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det B_{i1}$$

daher folgt

$$\det B_{i1} = (-1)^{i+1} \det A^{i1}$$

dann die Formel
herleiten

$$\det B_{i1} = (-1)^{i+1} \det A^{i1}$$

52)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$4x^3 + bx^2 + cx + d - 3ax^2 + 2bx - c$$

$$ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-2b)x + (d-c)$$

$$(a \ b \ c \ d) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a \ b-3a \ c-2b \ d-c)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

53)

56)

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - \sqrt{2}x_2) \cdot (x_1 + \sqrt{2}x_2)$$

$$y(v, v) = v_1 v_2 - v_2 v_1 = 0 \quad \leftarrow \text{gilt für symmetrische quadrup}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} y = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 - 4x_1 x_2 + 5x_2^2$$

$$p(v, v) > 0 \quad (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

$$v_1^2 - 2(v_1 v_2 + v_2 v_1) + 5v_2^2 > 0$$

$$v_1^2 + 5v_2^2 - 4v_1 v_2 > 0$$

$$(v_1 - 2v_2)^2 + v_2^2 > 0$$

$$v_1^2 + 5v_2^2 - 4v_1 v_2 > 0 \quad \Leftrightarrow v_1 v_2 > 0$$

$$v_1^2 + 5v_2^2 < 4v_1 v_2 \quad \Leftrightarrow 4v_1 v_2 > 0$$

58) ~~$| \langle v, w \rangle |^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$~~

~~$| \langle v, w \rangle |^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$~~

~~$n \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} = \langle \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}, \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \rangle$~~

~~$| \langle \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}, \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \rangle |^2 = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \dots + \frac{1}{a_1^2 + \dots + a_n^2}$~~

$n^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2})$

$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \|a\| \quad \|a\|^2 = \langle a, a \rangle$

$n^2 \leq \langle a, a \rangle \cdot \langle \frac{1}{a}, \frac{1}{a} \rangle$

$| \langle a, \frac{1}{a} \rangle |^2 = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \right)^2 = n^2 \quad \square$

59)

$\cos(\varphi) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

applied norm der 1-norm

$\langle a, b \rangle = 1$

$\|a\| = 1$

$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\|b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \sqrt{n}$

60)

$\langle v+w, v+w \rangle + \langle v-w, v-w \rangle = 2 \cdot \langle v, v \rangle + 2 \cdot \langle w, w \rangle$

$\langle v+w, v-w \rangle$

$\langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle = 2 \cdot \langle v, v \rangle + 2 \cdot \langle w, w \rangle$

$2 \cdot \langle v, v \rangle + 2 \cdot \langle w, w \rangle$



691

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{w_1'}{\|w_1'\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$w_2' = v_1 - \langle w_1, v_1 \rangle w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\|w_2'\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3' = v_3 - \langle w_1, v_3 \rangle w_1 - \langle w_2, v_3 \rangle w_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot (-\sqrt{2}) - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{\|w_3'\|} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 + \frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2}$$

56)

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y)$$

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y))$$

55)

$$A = A^T$$

~~$$B = B^T$$~~

$$B = -B^T$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{12} = -a_{21}$$

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad b_{12} = -b_{21}$$

$$C = A + B$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(C) = \text{rang}(A) \quad \text{beliebige Werte nehmen}$$

$$a + b = c_1 \quad \begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$a - b = c_2$$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$\exists c_1 : c_2 \in [\dots, \infty, \infty[$$

$$a + b = c_1$$

$$a \rightarrow \gg 0 : b \rightarrow \ll 0$$

$$a - b \rightarrow \gg 0$$

$$a \rightarrow \ll 0 : b \rightarrow \gg 0$$

$$a - b \rightarrow \ll 0$$

alle Werte für c_2
erreichbar wenn
 c_1 fix

67)

~~$\dim(\ker(\pi)) \neq 0$~~
 ~~$\dim(\ker(\pi)) = 0$~~

π Invertierbar $\rightarrow \pi$ bijektiv
 $\dim(\ker(\pi)) = 0$

$v_{ij} \rightarrow v_{ij} + \underbrace{\phi(v_{ij})}_{\bar{v}_{ij}}$

$v_{ij} = 0 \rightarrow v_{ij} + \bar{v}_{ij} = 0$

~~$\dim(\ker(\pi)) \neq 0$~~

$\exists v_{ij} \neq 0 : v_{ij} + \bar{v}_{ij} = 0$

$\langle x, \phi(x) \rangle = \langle \phi(x), x \rangle$
 $\pi: V \rightarrow V$
 $\pi = id \oplus \phi$

$v \mapsto v + \phi(v)$

$\frac{v_{ij} - \bar{v}_{ij}}{0} = \bar{v}_{ij} = -v_{ij}$ 22 nicht

Es genügt zu zeigen dass π injektiv ist da
 $\dim V < \infty$ Dafür genügt es zu zeigen

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht

dass $\|\pi(v)\| > 0$ für alle $v \neq 0$ selbst symmetrisch

68)

$\|\pi(v)\|^2 = \langle \pi(v), \pi(v) \rangle = \langle v + \phi(v), v + \phi(v) \rangle$
 $= \langle v, v \rangle + \langle v, \phi(v) \rangle + \langle \phi(v), v \rangle + \langle \phi(v), \phi(v) \rangle$
 $= \|v\|^2 + 2\langle v, \phi(v) \rangle + \|\phi(v)\|^2$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ -x + y \end{pmatrix}$

$\geq \|v\|^2 + \|\phi(v)\|^2 - 2\|v\|\|\phi(v)\|$
 $= (\|v\| - \|\phi(v)\|)^2$

$\langle v, \phi \rangle = -\|v\| \cdot \|\phi(v)\|$

$-\lambda v = -\phi(v)$

$(\|v\| - \|\phi(v)\|) = (\|v\| - \lambda\|v\|) = (1 - \lambda)\|v\|$
 $= 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$\phi(v) = -v$

64



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 $\frac{1}{\sqrt{14}}$

$$\pi(v) = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2$$

$$\frac{4 + 25 + 9}{\sqrt{14}} = \frac{38}{\sqrt{14}}$$

$$\begin{pmatrix} x-4 \\ y+5 \\ z-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} x-4 &= 9-z \\ x-4 &+ (y+5) + 3(z-9) = 0 \\ x-2y+z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 25 + 9 = 38$$

$$\frac{38}{\sqrt{14}}$$

$$\begin{pmatrix} 7,313 \\ -36,565 \\ 7,313 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,313 \\ -31,565 \\ -1,687 \end{pmatrix}$$

$$\|K\|^2 = \|v - w\|^2 - \|w - \pi(v)\|^2$$

$$\|v - w\|^2 = \|w - \pi(v)\|^2 + \|K\|^2$$

$$\|v - w\|^2 > \|K\|^2$$

$$\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 70 \\ 55 \\ 205 \end{pmatrix}$$

$$61) \quad 1, \cos(nx), \sin(nx) \quad n=1, 2, \dots \quad (0, [0, 2\pi])$$

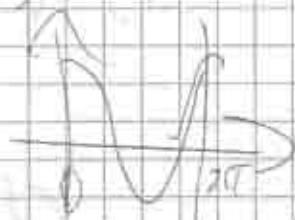
$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

$$72) \quad \langle 1, \cos(nx) \rangle = 0$$

$$\langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle = 0$$

$$\langle 1, \sin(nx) \rangle = 0$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx = 0$$



$$\int_0^{2\pi} \cos(3x) dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos(3x) dx + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} \cos(3x) dx$$

$$y = 3x \quad \text{subst.} \quad \int_0^{2\pi} \cos(y) \frac{1}{3} dy = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos(y) \frac{1}{3} dy + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos(y) \frac{1}{3} dy + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} \cos(y) \frac{1}{3} dy$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0$$

which holds for

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx) \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin(nx) \cos(nx) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \sin^2(nx) dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx) + \sin^2(nx) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi = \frac{1}{n} \sin(nx) \cos(nx) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx$$

normal

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

63/ $B = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} \quad C([-1, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

$$\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dt = \left. t \right|_{-1}^1 = 2$$

$$w_1 = 1 \quad w_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$w_2 = x - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \cdot dx = x$$

addition

$$w_2' = \frac{x}{\sqrt{3/2}} \quad \int_{-1}^1 x \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 = 0$$

$$w_3 = x^2 - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, x^2 \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle \frac{x}{\sqrt{3/2}}, x^2 \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3/2}}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}$$

$\int = 0$

$$w_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx = \frac{45}{8}$$

70)

$$\det(A) \neq 0$$

$$\det(I) = 1$$

$$\det(A^{-1} \cdot A) = 1$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M(I) = 1$$

$$M(A^{-1} \cdot A)$$

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) + (a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2) + (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2) = 3$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \leq n$$

$$\left| \sum_{i=1}^n a_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \leq n$$

$$= |M(A)|$$

$$\Rightarrow |M(A)| \leq n$$

71)

$$\det((A+B)(A-B)) = 0$$

$$\det(A+B) \cdot \det(A-B) = 0$$

$$\text{si } \det(A) = 1 \wedge \det(B) = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

$$\det(B) = \pm 1$$

$$73) (A-I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1+2 & -3 \\ 2 & 2 & 1-3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-I) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1-3)(1-3) - 6 + 6 - 6 + 3(1-3) + 2(1-2)$$

$$= 1 \cdot (-2)(-2) - 6 + 6 - 6 + 3(-2) + 2(-1) = 4 - 6 + 6 - 6 - 3 + 2 = -4$$

$$\cancel{A^3 - 5A^2 - 4A + 3} \quad A^3 - A^2 - A + 1$$

$$(A-I)^2 (A+1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1, R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y - z = 0$$

$$3x + 3y - 3z = 0$$

$$2x + 2y - 2z = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-x + y - z = 0$$

$$3x + 3y - 3z = 0$$

$$2x + 2y - 2z = 0$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = B A B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

51)

$$\begin{aligned}
 &= (y^2 z^3 A^3 - \cancel{x^2 y^2 A^3} - \cancel{x^2 z^3 A^3} + \cancel{x^2 z^3 A^3} - \cancel{y^2 z^3 A^2} + \cancel{x^2 y^2 A^2} + \cancel{x^2 y^2 A^2} - \cancel{x^2 z^3 A^2} + \\
 &\quad y^2 z^3 A - \cancel{x^2 y^2 A} - \cancel{x^2 y^2 A} + \cancel{x^2 y^2 A} - \cancel{x^2 y^2 A} + \cancel{x^2 y^2 A} + \cancel{x^2 y^2 A} - \cancel{x^2 y^2 A} + \\
 &\quad y^2 z^3 A^2 - \cancel{x^2 y^2 A^2} - \cancel{x^2 y^2 A^2} + \cancel{x^2 y^2 A^2} - \cancel{x^2 y^2 A^2} + \cancel{x^2 y^2 A^2} + \cancel{x^2 y^2 A^2} - \cancel{x^2 y^2 A^2} + \\
 &\quad - y^2 z^3 A + \cancel{y^2 z^3 A} + \cancel{x^2 y^2 A} + \cancel{x^2 y^2 A} + \cancel{x^2 y^2 A} - \cancel{x^2 y^2 A} - \cancel{x^2 y^2 A} + \cancel{x^2 y^2 A} \\
 &\quad - y^2 z^3 A^3 + \cancel{y^2 z^3 A^3} - \cancel{x^2 y^2 A^3} + \cancel{x^2 y^2 A^3} + \cancel{x^2 y^2 A^3} - \cancel{x^2 y^2 A^3} + \cancel{x^2 y^2 A^3} - \cancel{x^2 y^2 A^3} \\
 &\quad - y^2 z^3 A^2 + \cancel{y^2 z^3 A^2} + \cancel{x^2 y^2 A^2} - \cancel{x^2 y^2 A^2} - \cancel{x^2 y^2 A^2} + \cancel{x^2 y^2 A^2} - \cancel{x^2 y^2 A^2} - \cancel{x^2 y^2 A^2} + \cancel{x^2 y^2 A^2})
 \end{aligned}$$

74)

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = +2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 = 0$$

$$+x_3 = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-3x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 - 2x_3 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_3 = 0$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-3(-2x_3) - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -2x_2$$

$$5x_2 + x_3 = 0$$

$$5x_2 - \frac{1}{2}x_1 = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{2}x_1$$

$$5x_2 - x_1 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +128 \end{pmatrix}$$

~~$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix}$$~~

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A^7$$

75)

$$\det(KI - A)$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Hauptdiagonale
dann weil A symmetrisch
⇒ normal und hermitesch

KI beeinflusst nur Hauptdiagonale

doch Hauptdiagonale in A und A^T genau gleich $\Rightarrow \det(KI - A) = \det(KI - A^T)$

Charakt. Polynom von A und A^T gleich
also auch Eigenwerte

Eigenvektoren unterschiedlich

$$(KI - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq (KI - A^T) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

antennierliche
Abstraktion bei Werten außerhalb der
Hauptdiagonale

77)

$$(A I - A)$$

$$(A I - A^{-1})$$

$$(c I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{c} I - A^{-1} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$A x = \lambda x$$

$$A^{-1} A x = \lambda A^{-1} x$$

$$x = \lambda A^{-1} x$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} - A^{-1} \right) x = 0 \quad x = x$$

$$\det(A I - A)$$

$$c_0 I + c_1 A + \dots + c_n A^n$$

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & -A \end{pmatrix} = 0$$

A invertierbar $\rightarrow$ (kein EW von A)

0 EW von A $\rightarrow$ A nicht invertierbar

$$(c I - A) = \left(\frac{1}{c} I - A^{-1} \right)$$

$$c I - \frac{1}{c} I = A - A^{-1}$$

$$+ A \cdot \left(-c I + \frac{1}{c} I \right) + A = I$$

$$A \cdot \left(\frac{1}{c} I - A^{-1} \right) = I$$

68)

$$\Phi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2 \cdot \Phi = (2y - z, x + y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y - z \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \Phi(x), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \Phi(y) \rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \left\langle \vec{x}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_3 - y_1 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_3 - x_1 y_2 = x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_2 y_3$$

Name:
Matrikelnr.:
Gruppe:

3

Lineare Algebra für Physik

Übungstest WS 2004/05, Gruppe 2

Unterstreiche in jeder Aufgabe *alle* richtigen Antworten.

1) Das GLS
$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & & -2x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & +x_2 & -5x_3 & = & 6 \end{array}$$
 hat

- a) keine Lösung b) die Lösung $(2, 1, 1)$ c) unendlich viele Lösungen
d) als Lösung einen 2-dimensionalen affinen Teilraum von $\mathbb{R}^3$

2) Die Lösungsmenge des GLS

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = & -1 \\ 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +5x_4 & = & 2 \end{array}$$

- a) ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^4$ b) stellt eine Ebene dar c) ist eindimensional
d) hängt vom Ergebnisvektor $(0, 1, -1, 1)$ ab

3) Die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist

- a) -2 b) 2 c) 1 d) -1

4) Die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^4$ mit A aus Punkt

- 3)
a) hat Rang 4 b) hat Bild $\mathbb{R}^4$ c) ist injektiv d) bildet Geraden auf Geraden ab

5) Die Abbildung $\phi : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, die einem Polynom $p(x)$ den Vektor $(p(0), p'(0), p''(0))$ zuordnet

- a) ist surjektiv b) ist linear c) hat eindimensionalen Kern
d) enthält kein Polynom vom Grad 3 im Kern

6) Die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat

- a) Determinante 1 b) ganzzahlige Eintragungen c) 2 gleiche Spalten
d) den Eigenwert 1

7) Das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^3$ von $(1+i, 2, 0)$ und $(1-i, i, 1)$ hat den Wert

- a) $-2+2i$ b) 0 c) $-2-2i$ d) $2+2i$

8) Die Bilinearform $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ durch $f(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_2$ definiert wird, ist

- a) nicht ausgeartet b) positiv definit c) symmetrisch d) durch $f(x, y) = x^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y$ gegeben

9) Die Cauchy-Schwarz Ungleichung angewandt auf die Vektoren $(1, 0, 2)$ und $(-1, 1, i)$ mit dem Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^3$ liefert numerisch

- a) $-5 \leq 5$ b) $5 \leq 15$ c) $(1+2i)^2 \leq 15$ d) $(-1+2i)^2 \leq 15$

10) Die Matrixdarstellung der zu $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y, z) = (2x - y, 3z - x, x + y + z)$, dualen Abbildung bez. der zur Standardbasis in $\mathbb{R}^3$ dualen Basis ist

- a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

11) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 2 \\ 1-i & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) ist normal b) besitzt nur reelle EW c) ist hermitesch d) ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$

12) Der lineare Operator $\phi: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$, definiert durch $\phi(p) = p - p'$

- a) hat 1 als EW b) ist diagonalisierbar c) hat 0 als Eigenwert
d) besitzt alle Konstanten als Eigenvektoren

13) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- a) ist invertierbar b) hat die EW 0, 1, 2 c) ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ d) ist orthogonal

Name:

Matrikelnr.:

Gruppe:

Lineare Algebra für Physik

Übungstest WS 2004/05, Gruppe 1

Kennzeichne in jeder Aufgabe *alle* richtigen Antworten.

1) Das GLS
$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & & -2x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & -x_2 & -5x_3 & = & 4 \end{array}$$
 hat

- a) keine Lösung b) die Lösung $(2, 1, 1)$ c) unendlich viele Lösungen
d) als Lösung einen 2-dimensionalen affinen Teilraum von $\mathbb{R}^3$

2) Die Lösungsmenge des GLS

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = & -1 \\ 4x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & 1 \end{array}$$

- a) ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^4$ b) stellt eine Ebene dar c) ist eindimensional
d) hängt vom Ergebnisvektor $(0, 1, -1, 1)$ ab

3) Die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist

- a) -2 b) 2 c) 1 d) -1

4) Die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^4$ mit A aus Punkt 3)

- a) hat Rang 4 b) hat Kern $\{0\}$ c) ist surjektiv d) bildet Geraden auf Geraden ab

5) Die Abbildung $\phi : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, die einem Polynom $p(x)$ den Vektor $(p(0), p'(0), p''(0))$ zuordnet

- a) ist surjektiv b) ist linear c) hat eindimensionalen Kern
d) enthält alle Polynome vom Grad 3 im Kern

6) Die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat

- a) Rang 3 b) ganzzahlige Eintragungen c) 2 gleiche Spalten
d) Determinante -1

7) Das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^3$ von $(1+i, 2, 0)$ und $(1-i, 2i, 1)$ hat den Wert

- a) $-2+2i$ b) 0 c) $-2-2i$ d) $2+2i$

8) Die Bilinearform $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ durch $f(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_1 + x_2 y_2$ definiert wird, ist

- a) nicht ausgeartet b) positiv definit c) symmetrisch d) durch $f(x, y) = x^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y$ gegeben

9) Die Cauchy-Schwarz Ungleichung angewandt auf die Vektoren $(1, 0, 2)$ und $(-1, 1, i)$ mit dem Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^3$ liefert numerisch

- a) $-5 \leq 5$ b) $5 \leq 15$ c) $5 \leq (2+i)^2$ d) $(-1+2i)^2 \leq 15$

10) Die Matrixdarstellung der zu $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y, z) = (2x - y + z, z - x, 3y + z)$, dualen Abbildung bez. der zur Standardbasis in $\mathbb{R}^3$ dualen Basis ist

- a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

11) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 2 \\ 1-i & 1 & -i \\ 2 & i & 0 \end{pmatrix}$

- a) ist normal b) besitzt nur reelle EW c) ist hermitesch d) ist zu einer reellen Matrix ähnlich

12) Der lineare Operator $\phi: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$, definiert durch $\phi(p) = p + p'$

- a) hat 1 als EW b) ist diagonalisierbar c) hat 0 als Eigenwert
d) besitzt alle Konstanten als Eigenvektoren

13) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- a) ist invertierbar b) hat die EW 1, 2 c) ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ d) ist orthogonal

34)

$$\text{im}(\varphi_1) = \text{im}(\varphi_2)$$

$$\text{ker}(\varphi_1) = \text{ker}(\varphi_2)$$

$$\varphi_1 \neq \varphi_2$$

$$\varphi_1: V \rightarrow W$$

$$\varphi_2: V \rightarrow W$$

$$V: \mathbb{R}^2$$

$$W: \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_1: (x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda y)$$

$$\varphi_2: (x, y) \rightarrow (x, y)$$

$$\varphi_1 \neq \varphi_2$$

$$\text{ker}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ also gives}$$

$$\text{ker}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{im}(\varphi_1) = 1\text{-dimensional subspace}$$

$$\text{im}(\varphi_2) = 2\text{-dimensional}$$

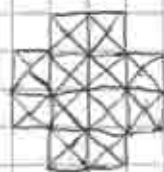
35)

$$\text{kernel} \rightarrow \emptyset \quad \text{im}(\phi) = V$$

$$\textcircled{a} \dim(\text{ker}(\phi)) = 0$$

$$\textcircled{b} \text{ker}(\phi) = \{0\}$$

$$\textcircled{c} \dim(\text{im}(\phi)) = \dim(V) = \dim(V)$$



$$\dim(p) > \dim(p^k) \Rightarrow \dim(p) = \dim(\phi(p))$$

$$\Rightarrow \textcircled{4}$$

$$\phi(p) = 0$$

$$p = 0 \Rightarrow \textcircled{3}$$

$$\dim(p_1) = 0 \Rightarrow \textcircled{2}$$

$$\phi: V \rightarrow V$$

$$\text{im}(\phi) = V \textcircled{1}$$