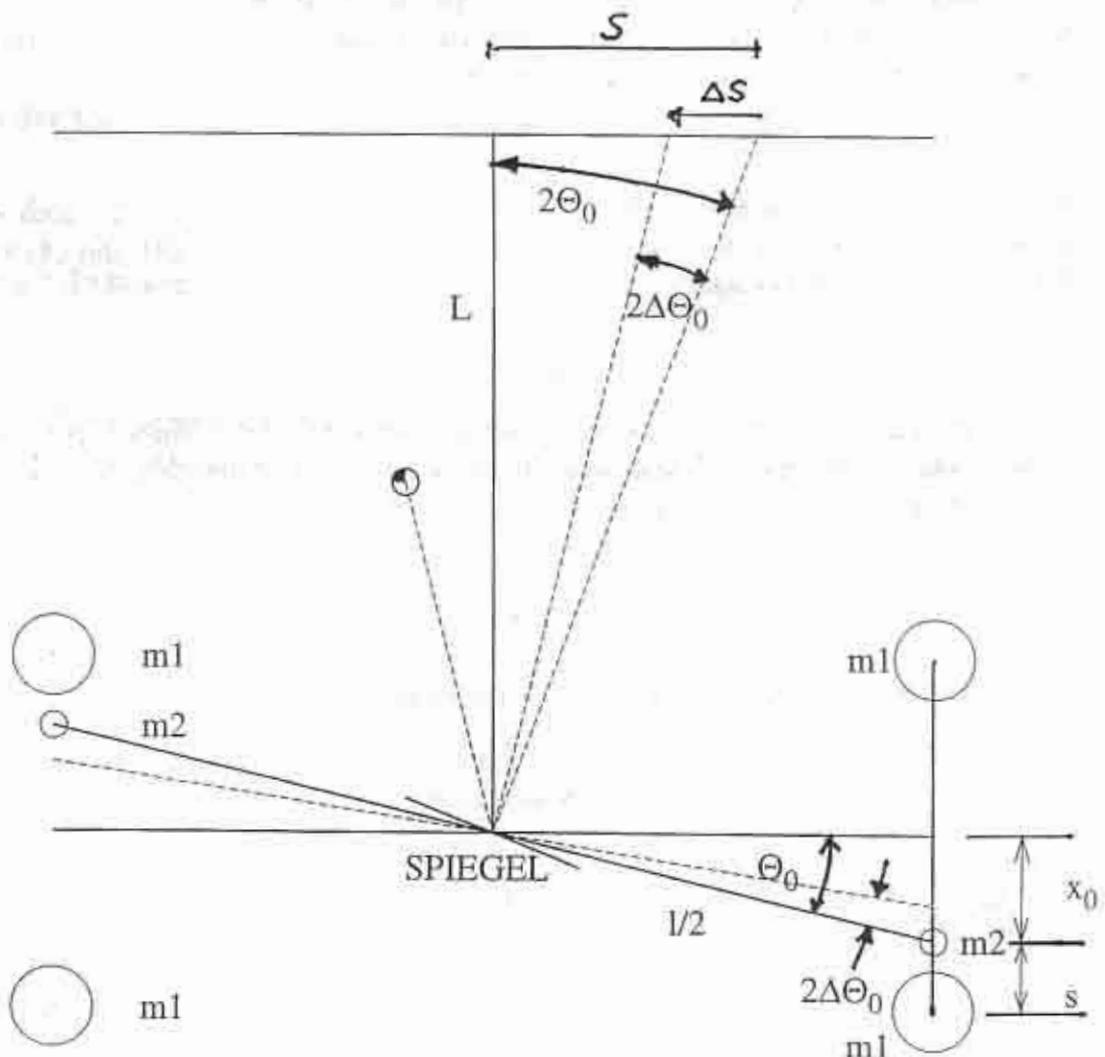
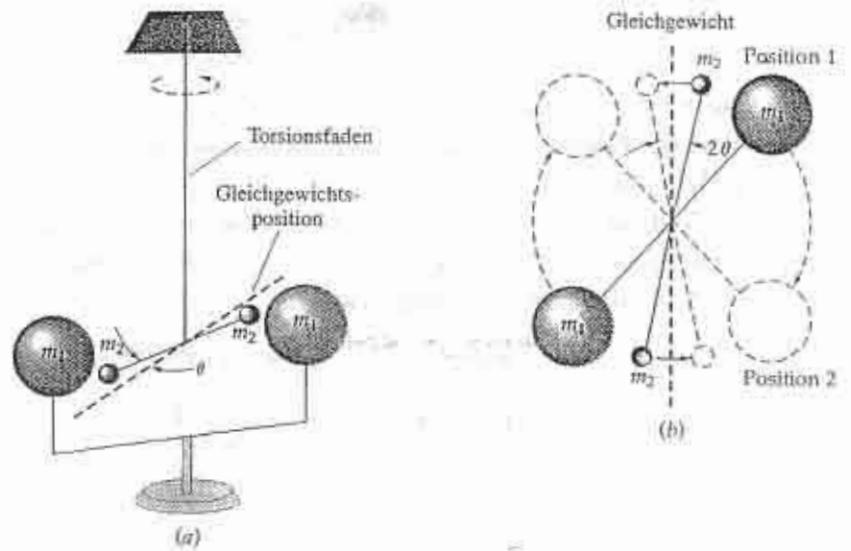


Bestimmung der Gravitationskonstanten nach Cavendish

I. EXPERIMENTELLER AUFBAU

10.8 a) Schema der Apparatur, die Cavendish zur Messung von G benutzte. Wegen der (anziehenden) Gravitationskraft zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 wird der Torsionsdraht um einen sehr kleinen Winkel θ aus seiner Gleichgewichtsposition verdreht. b) Ansicht der Apparatur von oben. Um die schwierige direkte Messung des Winkels θ zu umgehen, werden im zweiten Teil des Experiments die großen Kugeln so gedreht, daß ihr Abstand von der Gleichgewichtsposition der Waage der gleiche ist wie auf der anderen Seite. Der Winkel, um den der Draht sich dann dreht, ist 2θ . Wenn man den Torsionsmodul des Drahtes kennt, läßt sich daraus die Kraft m_1 auf m_2 bestimmen und daraus wiederum die Gravitationskonstante G .



II. METHODE DER (ANNÄHERND KONSTANTEN) ANFANGSBESCHLEUNIGUNG

Nach dem Umlegen der großen Massen m_1 wirkt auf eine der beiden kleinen Massen m_2 eine Kraft

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{(s + 2x_0)^2} + G \frac{m_1 m_2}{s^2}. \quad (1)$$

Der erste Term stammt von der direkten Anziehung durch die umgelegte Masse m_1 . Der zweite Term ist eine Konsequenz des im Augenblick des Umlegens noch verdrehten Drahtes. Er entspricht einer Kraft, die vor dem Umlegen (s. Abb. 1) der Anziehung von m_2 durch die große Masse m_1 in Position 1 das Gleichgewicht gehalten hat (so daß der Balken zu diesem Zeitpunkt in Ruhe ist). Diese Kraft wirkt in dieselbe Richtung wie der erste Term in (1). Wegen $x_0 \ll s$ wird aus (1)

$$F_g = 2G \frac{m_1 m_2}{s^2}. \quad (2)$$

Die Kraft F_g bewirkt eine Beschleunigung der Masse m_2 ,

$$F_g = m_2 \frac{d^2 x}{dt^2} \approx m_2 a = \text{const}, \quad (3)$$

die für kurze Zeit Δt nach dem Umlegen der großen Massen als konstant gleich a angenommen werden kann, da sich m_2 während Δt praktisch noch sehr wenig bewegt hat und die Geometrie somit nahezu unverändert ist. In dieser Zeit Δt ist der von m_2 zurückgelegte Weg daher gleich

$$\Delta x = \frac{a}{2} (\Delta t)^2, \quad (4)$$

wobei wir die Bewegung auf dem Kreis mit dem (großen) Radius $l/2$ durch eine Bewegung auf einer Geraden in x -Richtung annähern. Aus (2), (3) und (4) folgt für die Gravitationskonstante G

$$G = \frac{\Delta x s^2}{m_1 (\Delta t)^2}. \quad (5)$$

Der in Δt zurückgelegte Weg Δx wird aus der Ablenkung ΔS eines Lichtzeigers (siehe Abb. 2) bestimmt. Wegen der Kleinheit aller vorkommenden Winkel kann der Tangens eines Winkels durch den Winkel selbst approximiert werden. Somit gilt

$$\frac{\Delta S}{L} \approx 2\Delta\Theta \approx \frac{2\Delta x}{(l/2)}, \quad (6)$$

und man findet, wenn Δx in (4) durch ΔS ausgedrückt wird:

$$G = \frac{s^2 l \Delta S}{4m_1 L (\Delta t)^2} \quad (7)$$

Beispiel:

- $L = 13.5$ m, Länge des Lichtzeigers
- $l = 0.1$ m, Länge des Waagebalkens der Drehwaage
- $s = 4.75$ cm, kleinster Abstand von m_1 und m_2 im Gleichgewicht
- $m_1 = 1.5$ kg, Masse der umgelegten großen Kugel
- $\Delta t = 60$ s, Meßzeit nach dem Umlegen der Massen
- $\Delta S = 8$ cm, zurückgelegter Weg des Lichtzeigers

Damit findet man für die Gravitationskonstante

$$G = 6.2 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}.$$

III. METHODE DER GLEICHGEWICHTSLAGEN

Die Gravitationskräfte zwischen den Massen m_1 und m_2 üben auf die Waage ein Drehmoment D_G aus, das den Aufhängedraht der Waage verdrillt. Diese Torsion erzeugt ein Gegendrehmoment D_T proportional zum Drehwinkel, das im ausgelenkten Endzustand der Waage das Drehmoment D_G exakt kompensiert:

$$D_G + D_T = 0. \quad (8)$$

Wegen der kleinen Auslenkwinkel gilt für den absoluten Betrag

$$D_G \approx 2 \frac{l}{2} G \frac{m_1 m_2}{s^2} = l G \frac{m_1 m_2}{s^2}, \quad (9)$$

Das Gegendrehmoment des Aufhängedrahtes ist gegeben durch

$$D_T = C_R \theta_0, \quad (10)$$

wobei θ_0 den Auslenkwinkel im Endzustand bedeutet. C_R heißt Richtmoment und ist eine Drahtkonstante, die aus dem Trägheitsmoment des Waagebalkens,

$$I = 2m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2, \quad (11)$$

und seiner Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C_R}} \quad (12)$$

berechnet werden kann:

$$C_R = \frac{2\pi^2 m_2 l^2}{T^2} \quad (13)$$

Aus der Geometrie (siehe Abbildung) folgt

$$\theta_0 \approx \sin(\Theta_0) = \frac{x_0}{l/2} \approx \frac{1}{2} \tan(2\Theta_0) = \frac{S}{2L} \quad (14)$$

Somit folgt für die Gravitationskonstante

$$G = \frac{\pi^2 s^2 l S}{m_1 T^2 L} \quad (15)$$

Beispiel:

- $L = 13.5$ m, Länge des Lichtzeigers
- $l = 0.1$ m, Länge des Waagebalkens der Drehwaage
- $s = 4.75$ cm, kleinster Abstand von m_1 und m_2 im Gleichgewicht
- $m_1 = 1.5$ kg, Masse der umgelegten großen Kugel
- $S = 0.22$ m, Maximale Auslenkung des Lichtzeigers aus der symmetrischen Lage
- $T = 610$ s, Schwingungsdauer des Waagebalkens.

Damit findet man für die Gravitationskonstante

$G = 6.5 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$. Der beste Wert ist $G = 6.673(10) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$.

IV. LITERATUR

1. P. A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1994), p. 309 - 311.

Die Coulombsche Drehwaage

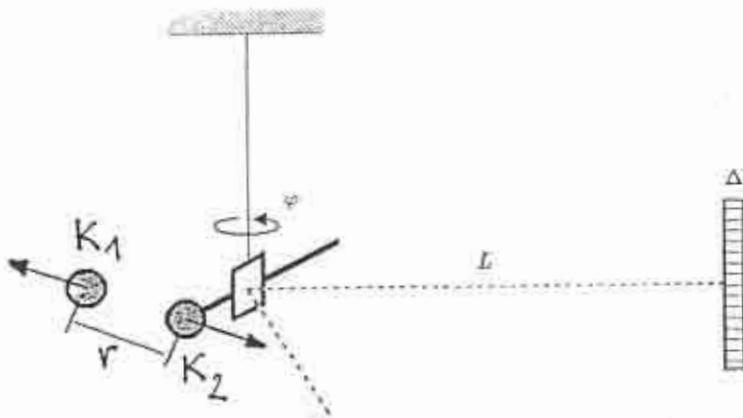
Die Kraftwirkungen zweier im Vakuum befindlicher elektrischer Punktladungen aufeinander sind quantitativ durch das Coulombsche Gesetz gegeben:

$$\vec{K}_E = C_E \frac{e_1 e_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

\vec{K}_E Kraft (N) , eElektrische Ladung (C) , rAbstand der Punktladungen

$\frac{\vec{r}}{r}$ Einheitsvektor in der Verbindungsgeraden , C_E Kopplungskonstante

Die Abhängigkeit der anziehenden bzw. abstoßenden Kraft \vec{K}_E von der Ladung q und dem Abstand r soll mittels der Coulombschen Drehwaage gezeigt werden. Der Versuch kann praktische ohne Änderung der Verhältnisse anstatt im Vakuum auch in Luft durchgeführt werden.



Eine Metallkugel (K_1) ist am Ende eines horizontal verschiebbaren Stabs befestigt, eine zweite gleichartige Kugel (K_2) sitzt am Ende eines an einem Torsionsfaden waagrecht drehbar aufgehängten Stäbchens. Beide Kugeln sind isoliert montiert und können daher elektrisch aufgeladen werden. Durch die elektrische Abstoßung bzw. Anziehung dreht sich die Kugel K_2 aus ihrer Ruhelage. Der Torsionswinkel φ kann als proportional dem Drehmoment des tordierten Fadens und damit der auf die Kugel K_2 wirkenden Rückstellkraft \vec{K}_R angesetzt werden.

Da in der Ruhelage die elektr. Kraft die Rückstellkraft aufhebt ($\vec{K}_E + \vec{K}_R = 0$), ist der Torsionswinkel φ auch proportional der elektr. Kraft \vec{K}_E

1. Abhängigkeit von \vec{K}_E von der Ladung q_1 :

Die Kugeln werden aufgeladen (e_1, e_2). Mit Hilfe einer gleichen ungeladenen dritten Kugel K_3 , die kurz mit K_1 leitend verbunden wird, kann aus Gründen der Symmetrie die Ladung e_1 auf die Hälfte reduziert werden.

Beobachtung: Der Torsionswinkel φ geht auf die Halbte seines Wertes zurück.

2. Abhängigkeit von \vec{K}_E vom Abstand r :

Der Mittelpunktsabstand der beiden Kugeln K_1 und K_2 wird verdoppelt.

Beobachtung: Der Torsionswinkel geht auf ein Viertel seines Wertes zurück.

$$C_R = \frac{2\pi^2 m_2 l^2}{T^2} \quad (13)$$

Aus der Geometrie (siehe Abbildung) folgt

$$\theta_0 \approx \sin(\Theta_0) = \frac{x_0}{l/2} \approx \frac{1}{2} \tan(2\Theta_0) = \frac{S}{2L} \quad (14)$$

Somit folgt für die Gravitationskonstante

$$G = \frac{\pi^2 s^2 l S}{m_1 T^2 L} \quad (15)$$

Beispiel:

- $L = 13.5$ m, Länge des Lichtzeigers
- $l = 0.1$ m, Länge des Waagebalkens der Drehwaage
- $s = 4.75$ cm, kleinster Abstand von m_1 und m_2 im Gleichgewicht
- $m_1 = 1.5$ kg, Masse der umgelegten großen Kugel
- $S = 0.22$ m, Maximale Auslenkung des Lichtzeigers aus der symmetrischen Lage
- $T = 610$ s, Schwingungsdauer des Waagebalkens.

Damit findet man für die Gravitationskonstante

$G = 6.5 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$. Der beste Wert ist $G = 6.673(10) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$.

IV. LITERATUR

1. P. A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1994), p. 309 - 311.

Die Coulombsche Drehwaage

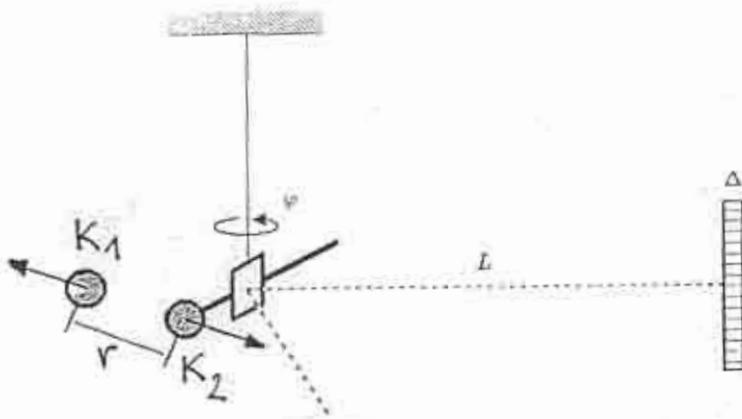
Die Kraftwirkungen zweier im Vakuum befindlicher elektrischer Punktladungen aufeinander sind quantitativ durch das Coulombsche Gesetz gegeben:

$$\vec{K}_E = C_E \frac{e_1 e_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

\vec{K}_E Kraft (N), e_1, e_2 Elektrische Ladung (C), r Abstand der Punktladungen

$\frac{\vec{r}}{r}$ Einheitsvektor in der Verbindungsgeraden, C_E Kopplungskonstante

Die Abhängigkeit der anziehenden bzw. abstoßenden Kraft \vec{K}_E von der Ladung q und dem Abstand r soll mittels der Coulombschen Drehwaage gezeigt werden. Der Versuch kann praktische ohne Änderung der Verhältnisse anstatt im Vakuum auch in Luft durchgeführt werden.



Eine Metallkugel (K_1) ist am Ende eines horizontal verschiebbaren Stabs befestigt, eine zweite gleichartige Kugel (K_2) sitzt am Ende eines an einem Torsionsfaden waagrecht drehbar aufgehängten Stäbchens. Beide Kugeln sind isoliert montiert und können daher elektrisch aufgeladen werden. Durch die elektrische Abstoßung bzw. Anziehung dreht sich die Kugel K_2 aus ihrer Ruhelage. Der Torsionswinkel φ kann als proportional dem Drehmoment des tordierten Fadens und damit der auf die Kugel K_2 wirkenden Rückstellkraft \vec{K}_R angesetzt werden.

Da in der Ruhelage die elektr. Kraft die Rückstellkraft aufhebt ($\vec{K}_E + \vec{K}_R = 0$), ist der Torsionswinkel φ auch proportional der elektr. Kraft \vec{K}_E .

1. Abhängigkeit von \vec{K}_E von der Ladung q_1 :

Die Kugeln werden aufgeladen (e_1, e_2). Mit Hilfe einer gleichen ungeladenen dritten Kugel K_3 , die kurz mit K_1 leitend verbunden wird, kann aus Gründen der Symmetrie die Ladung e_1 auf die Hälfte reduziert werden.

Beobachtung: Der Torsionswinkel φ geht auf die Halfte seines Wertes zurück.

2. Abhängigkeit von \vec{K}_E vom Abstand r :

Der Mittelpunktsabstand der beiden Kugeln K_1 und K_2 wird verdoppelt.

Beobachtung: Der Torsionswinkel geht auf ein Viertel seines Wertes zurück.

Tabelle 10.1 Messungen von G

Experimentator	Jahr	Methode	G ($10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$)
Cavendish	1798	Torsionswaage, Ablenkung	6,754
Poynting	1891	Gewöhnliche Waage	6,698
Boys	1895	Torsionswaage, Ablenkung	6,658
von Eötvös	1896	Torsionswaage, Ablenkung	6,65
Heyl	1930	Torsionswaage, Periode	
		Gold	6,678
		Platin	6,664
		Glas	6,674
Zahradniček	1933	Torsionswaage, Resonanz	6,659
Heyl und Chrzanowski	1942	Torsionswaage, Periode	6,673
Luther und Towler	1982	Torsionswaage, Periode	6,6726

Beispiel 18.3

Berechnen Sie das Verhältnis der elektrostatischen Kraft zur Gravitationskraft für zwei Protonen.

Jedes Proton hat die Ladung $+e$. Daher ist die elektrostatische Kraft F_e zwischen ihnen abstoßend und hat den Betrag

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

Die Gravitationskraft F_g ist anziehend und beträgt

$$F_g = G \frac{m_p^2}{r^2}$$

wobei m_p die Masse des Protons ist. Das Verhältnis dieser beiden Kräfte hängt nicht vom Abstand r der beiden Protonen ab:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{Gm_p^2}$$

Durch Einsetzen von $(1/4\pi\epsilon_0) = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ und $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ bekommt man

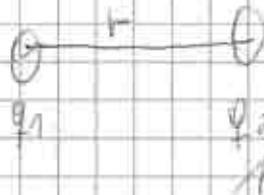
$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2} = 1,24 \cdot 10^{36}$$

1) NEWTON: ein kräftefreier Körper verhält sich entweder in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung

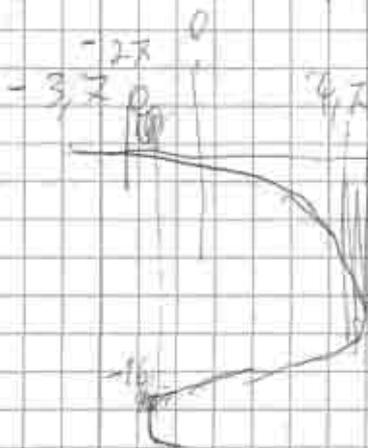
2) NEWTON: Kräfte sind die Ursache für Beschleunigung $\vec{F} = m\vec{a}$

3) NEWTON: Aktion - Reaktion

Gesetz von Coulomb



$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$



r	F
0	0:00
1	1:02
2	9:15
3	10:40

Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Foucault

- Astronomische Methoden
 - 1676 Olaf Römer: Verfinsterung der Jupitermonde
 - 1727 Aberration des Lichtes
- Erst im 19. Jahrhundert gelang die Messung im Labor:
 - 1849 H. Fizeau: Zahnradmethode
 - 1869 L. Foucault; Drehspiegelmethode (s. Abb.)

Die Lichtquelle L leuchtet mit Hilfe der Kondensorlinse K einen Spalt A hell aus (wobei K die Lichtquelle möglichst auf Unendlich abbilden soll (warum?)). Der Drehspiegel D sei zunächst in der Position S_1 in Ruhe. Der Spalt A wird über die Spiegel D und U von der Linse B auf den Endspiegel E abgebildet, von dem das Licht in sich selbst reflektiert wird. Das reflektierte Licht erreicht über U, B und D eine unter 45° gegen AD geneigte Glasplatte G , die einen Teil des reflektierten Lichtes nach M_1 ablenkt. Die Geometrie wird so gewählt, daß

$$AD = DB = (BU + UE)/2 = f \quad (1)$$

ist, wobei f die Brennweite der Linse B bedeutet. Der Strichmaßstab M ist gleich weit von der Glasplatte G entfernt wie der Spalt A von G , so daß

$$AD = MGD = f. \quad (2)$$

M_1 ist ein Bild des Spaltes A . Beachten Sie, daß die Lichtstrahlen keine Parallelstrahlen sind.

Wie verlaufen die Lichtstrahlen zwischen A, D, B, U und E , wenn sich der Drehspiegel in der Lage S_2 in Ruhe befindet? Was passiert bei langsamer Rotation des Drehspiegels?

Jetzt wird der Drehspiegel D so schnell gedreht, daß er sich in der Zeit τ , die das Licht zum Durchlaufen der Strecke $DUE = 3f$ und zurück benötigt, aus einer Position S_1 um den kleinen Winkel ϵ in die neue Lage S_2 dreht. Dann wird der von D reflektierte Strahl um 2ϵ gegenüber AD gedreht (warum?) und wird bei M_2 auf den Maßstab abgebildet. Somit gilt für die Verschiebung $\Delta = M_2 - M_1$:

$$\Delta = f \tan(2\epsilon) \approx 2f\epsilon \quad (3)$$

$$\epsilon = \omega\tau = 2\pi\nu\tau. \quad (4)$$

Dabei bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit des Drehspiegels D , und ν ist seine Kreisfrequenz. Weiters gilt

$$\tau = 2 \frac{3f}{c}. \quad (5)$$

Für die Lichtgeschwindigkeit c findet man somit

$$c = \frac{6f}{\tau} = \frac{12\pi\nu f}{\epsilon} = \frac{24\pi\nu f^2}{\Delta}. \quad (6)$$

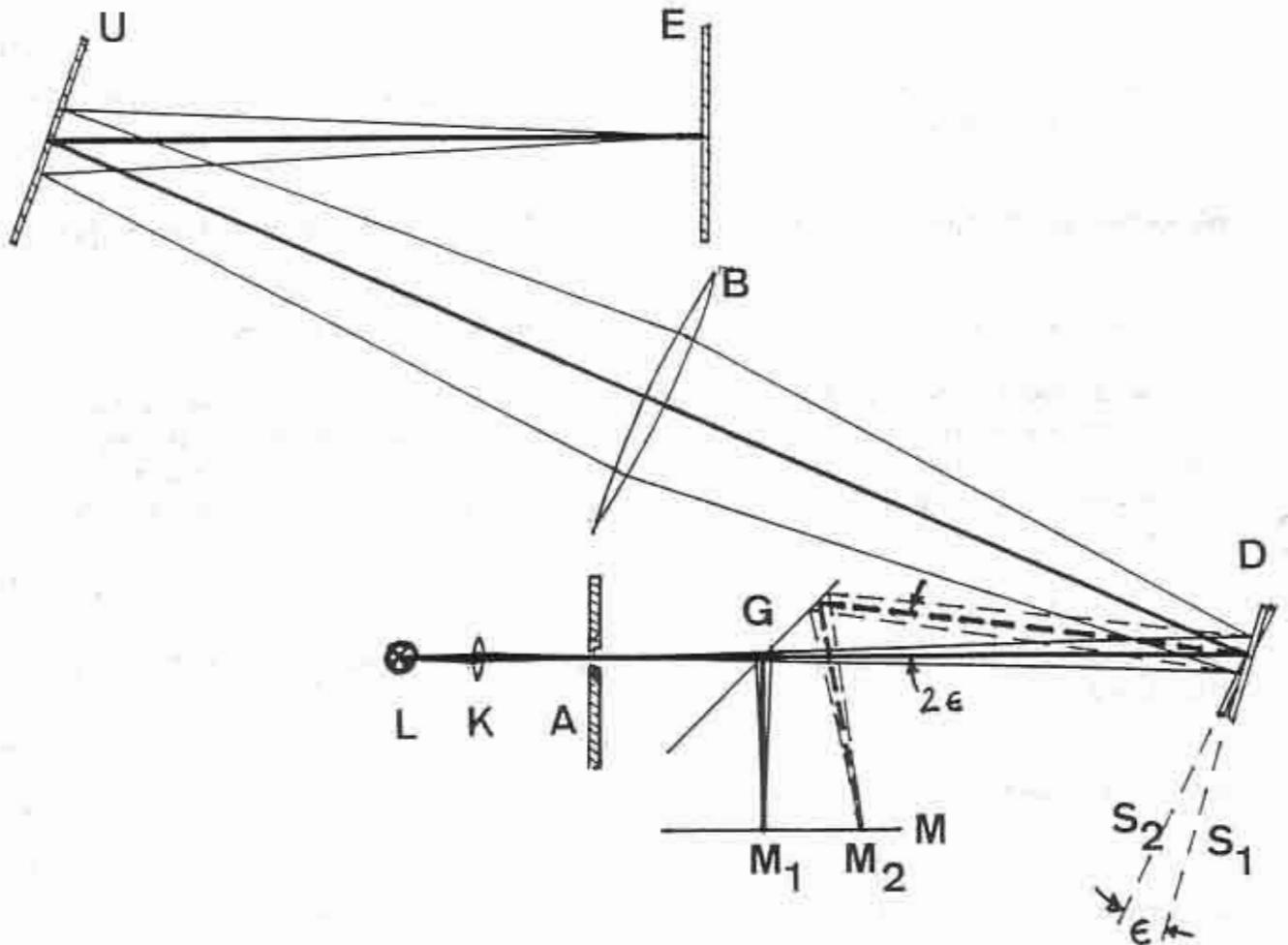
Bei unserem Versuch sind: $f = 4.95$ m, und $\nu = 440$ Hz. Δ wird gemessen.

Literatur: (Benützen Sie den Lesesaal der Zentralbibliothek für Physik im 5. Stock)

1. H. Vogel, *Gerthsen Physik*, Springer Verlag, 19. Auflage, p. 500 ff. (1997).
2. Bergmann - Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik Band 3, Optik*

Abb.: Experimenteller Aufbau

- L... Lichtquelle
- K... Kondensorlinse
- A... Spalt
- G... Glasplatte
- D... Drehspeigel
- B... Linse mit langer Brennweite
- U... Umlenkspiegel
- E... Endspiegel
- M... Maßstab (Strichplatte)



Das Fabry-Perot-Interferometer

Interferenzspektroskopie und Längenmessung

Fabry-Perot-Interferometer eignen sich zur Messung kleiner Längen, wobei als Maßstab die Lichtwellenlänge einer monochromatischen Lichtquelle dient.

Zum Verständnis betrachten wir zunächst die Reflexion eines Lichtstrahls an den Vorder- und Rückseiten einer planparallelen Platte. In der folgenden Abb. 1 sind alle geometrischen Größen definiert.

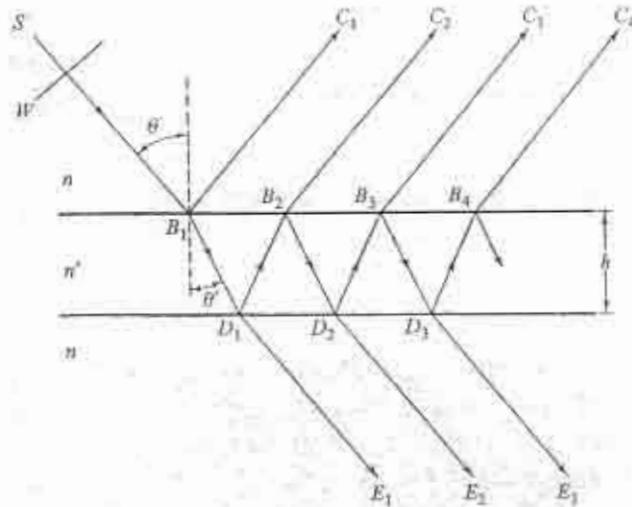


Abb. 1: Reflexion einer ebenen Welle an einer planparallelen Platte.

Ein einfallender Strahl S wird durch mehrmalige Reflexion in viele reflektierte und durchgehende Teilstrahlen aufgeteilt. Die optischen Wege benachbarter durchgehender Teilstrahlen $E_i, E_{i+1}, i = 1, 2, \dots$ (und analog benachbarter reflektierter Teilstrahlen C_i, C_{i+1} , die uns aber hier nicht interessieren) unterscheiden sich wegen des zweimaligen Durchlaufes der Platte um $\Delta = 2n'h \cos \Theta'$. Ihre Phasen unterscheiden sich daher um

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h \cos \Theta', \quad (1)$$

wobei λ_0 die Wellenlänge des einfallenden Lichtes ist. Die Feldstärken benachbarter Teilstrahlen E_i, E_{i+1} nehmen jeweils um einen Faktor \mathcal{R} ab, der zwischen 0 und 1 liegt und die Reflektivität der reflektierenden Flächen bezeichnet. Die Feldstärken aller durchgehenden Teilstrahlen interferieren miteinander, wenn sie mit einer Sammellinse in einem Punkt der Brennebene vereinigt werden. Diese Summe führt auf eine geometrische Reihe (s. Optik im 2. Semester). Für die Intensität $I^{(t)}$ des durchgehenden Lichtes erhält man damit eine der beiden Airy-Formeln:

$$I^{(t)}(\delta) = I^{(i)} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (2)$$

Dabei ist $I^{(i)}$ die einfallende Lichtintensität. Der Parameter

$$F \equiv \frac{4\mathcal{R}}{(1 - \mathcal{R})^2} \quad (3)$$

wächst mit steigender Reflektivität stark an.

In Abb. 2 ist das Verhältnis $I^{(t)}(\delta)/I^{(i)}$ als Funktion von δ gezeigt.

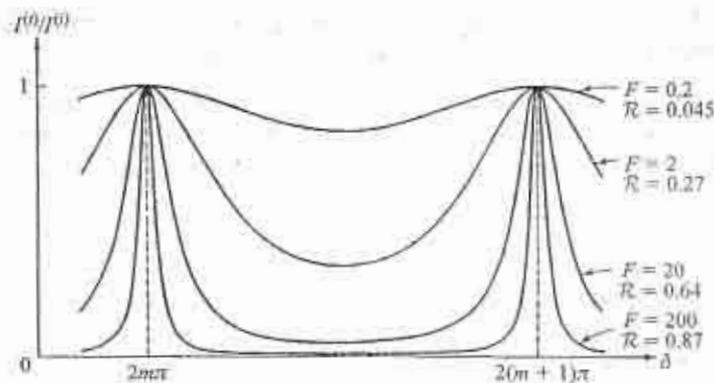


Abb. 2: Vielstrahlinterferenz: Intensitätsverhältnis $I^{(t)}(\delta)/I^{(i)}$ als Funktion der Phasendifferenz δ . m ist ganzzahlig.

Maxima treten auf, wenn δ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, $\delta_m = m2\pi$, was einem Gangunterschied $\Delta_m = m\lambda_0$ zwischen benachbarten Parallelstrahlen entspricht, die somit maximal konstruktiv interferieren. Die Maxima werden umso schärfer, je näher die Reflektivität \mathcal{R} bei 1 liegt, was wegen (3) einem großen Wert von F entspricht. Physikalisch bedeutet ein großes \mathcal{R} , daß sehr viele Teilstrahlen mit hoher Intensität zur Interferenz beitragen können (Vielstrahlinterferenz). Das Interferenzmuster des durchgehenden Lichtes besteht daher aus scharfen hellen Streifen auf dunklem Hintergrund.

Bezeichnet $\delta_m \pm \frac{\epsilon}{2}$ jene Werte von δ zu beiden Seiten des Maximums der Ordnung m , für die die Intensität auf die Hälfte ihres Maximalwertes abgefallen ist, so gilt gemäß (2):

$$\frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\epsilon}{4}} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

Für genügend großes F ist die Halbwertsbreite ϵ klein, sodaß $\sin(\epsilon/4) \approx \epsilon/4$ gesetzt werden kann. Dann folgt aus (4) für die Halbwertsbreite

$$\epsilon = \frac{4}{\sqrt{F}} \quad (5)$$

Das Verhältnis Maximalabstand zwischen benachbarten Maxima (2π) durch die Halbwertsbreite ϵ wird als *Finesse* \mathcal{F} bezeichnet:

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\epsilon} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \quad (6)$$

Sie ist ein zweckmäßiges Maß zur Charakterisierung der Schärfe der Interferenzmuster.

Das Fabry-Perot-Interferometer nutzt die Vielstrahlinterferenz zwischen parallel angeordneten Glas- oder Quarzplatten P_1 und P_2 aus (s. Abb. 3).

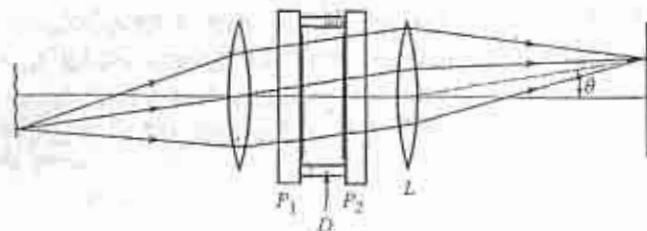


Abb. 3: Fabry-Perot-Interferometer (C. Fabry und A. Perot, Ann. Chim. Phys. (7), 16, 115 (1899)).

Die inneren Oberflächen sind verspiegelt, wobei für die Reflektivität dieser Flächen $\mathcal{R} > 0.9$ angestrebt wird. Das Licht von einer flächenhaften Lichtquelle (Wellenlänge = λ_0) fällt nahezu senkrecht auf die Platten ein. Wenn die Achse der Linse L senkrecht auf die Plattenebenen steht, so bestehen die Interferenzmuster aus hellen konzentrischen Ringen in der Brennebene der Linse L .

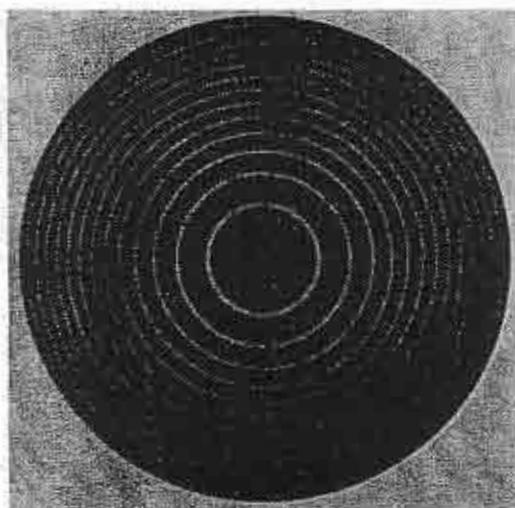


Abb. 4: Fabry-Perot Ringe in der Brennebene von L

Die Ordnung eines Interferenzringes ergibt sich gemäß (1) zu

$$m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2n'h \cos \Theta'}{\lambda_0} \quad (7)$$

$n' \approx 1$ ist der Brechungsindex der Luft zwischen den Platten, h ist der Abstand zwischen den reflektierenden Oberflächen, und Θ' ist der Reflexionswinkel.¹

Interferenzspektroskopie zur Messung des Wellenlängenunterschiedes für das Dublett der Natrium-D-Linie

¹Bei einer genaueren Behandlung muß auch ein Phasensprung bei der Reflexion berücksichtigt werden.

Die Struktur der Natrium-Linie besteht aus einem engen Dublett mit den Wellenlängen $\lambda_1 = 589.5932 \text{ nm}$ (D_1) und $\lambda_2 = 588.9965 \text{ nm}$ (D_2). Diese Wellenlängendifferenz beträgt somit etwa nur 1/1000 der mittleren Wellenlänge. Für jede dieser beiden Wellenlängen (die näherungsweise als monochromatisch angenommen werden) liefert das Fabry-Perot-Interferometer ein konzentrisches System von Interferenzringen. Für einen bestimmten Plattenabstand h_a fallen beide Ringsysteme ununterscheidbar übereinander, so daß sie wie ein einziges Ringsystem aussehen. Das bedeutet, daß bei vorgegebenem Reflexionswinkel Θ' die Gangunterschiede δ für λ_1 und λ_2 gleichzeitig ganzzahlige Vielfache von 2π sind, nämlich $m_1 2\pi$ und $m_2 2\pi$, wobei $m_1 \neq m_2$ ist. Für die Ordnungen gilt gemäß (7)

$$m_1 = \frac{2n'h_a \cos \Theta'}{\lambda_1} \quad ; \quad m_2 = \frac{2n'h_a \cos \Theta'}{\lambda_2} \quad (8)$$

Wird der Plattenabstand vergrößert, so ändern sich die Radien der beiden konzentrischen Ringsysteme verschieden schnell. Nach dem Wandern von etwa 580 Ordnungen liegen die Ringe eines Systems zwischen jenen des anderen. Nach dem Wandern von insgesamt $\Delta m \approx 1160$ Ordnungen und Erreichen eines Plattenabstandes h_b liegt wieder der Ring mit der Ordnung $m_1 + \Delta m$ von λ_1 genau über jenem mit der Ordnung $m_2 + \Delta m + 1$ für λ_2 . Die beiden Ringsysteme sind wieder nicht unterscheidbar. Jetzt gilt für die Ordnungen

$$m_1 + \Delta m = \frac{2n'h_b \cos \Theta'}{\lambda_1} \quad ; \quad m_2 + \Delta m + 1 = \frac{2n'h_b \cos \Theta'}{\lambda_2} \quad (9)$$

Subtraktion der linken bzw. rechten Gleichungen von (9) und (8) liefert

$$\Delta m = \frac{2n' \cos \Theta' (h_b - h_a)}{\lambda_1} \quad ; \quad \Delta m + 1 = \frac{2n' \cos \Theta' (h_b - h_a)}{\lambda_2} \quad (10)$$

und durch Division erhält man

$$\frac{\Delta m + 1}{\Delta m} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 + \Delta \lambda}{\lambda_2} = 1 + \frac{\Delta \lambda}{\lambda_2} \quad (11)$$

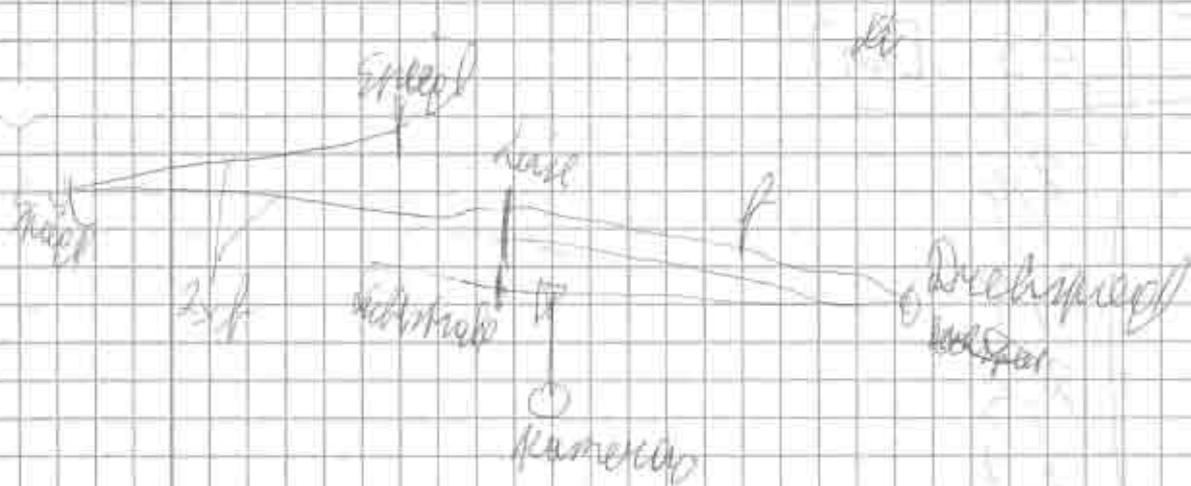
Daraus kann die sehr kleine Wellenlängendifferenz $\Delta \lambda$ gemäß

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda_2}{\Delta m}$$

bestimmt werden.

Literatur:

1. Max Born and Emil Wolf, *Principles of Optics*, 7. Auflage, Cambridge University Press, 1999.
2. Bergmann - Schäfer, *Experimentalphysik III: Optik*. Viele Auflagen.
3. Demtröder, *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*, p.296, Springer Verlag, Berlin, 1995.



Abstand von Drehspiegel bis zurück zum Drehspiegel = $6f$ diese

$\approx 6 \cdot 490$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = 2\pi \nu \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi \nu}$$

+
Frequenz

$$\sin(2\Delta\varphi) \approx \ln(2\Delta\varphi) = 2\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{f}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{2f} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{2f \cdot 2\pi \nu}$$

$$c = \frac{\Delta S}{\Delta t} \approx \frac{\Delta S \nu}{\Delta t} = \frac{6 \cdot 490 \cdot 490 \cdot 2\pi \nu}{\Delta S} = 24 \frac{f^2 \pi \nu}{\Delta S}$$

$$\frac{24 \cdot (4,9)^2 \cdot \pi \cdot 490}{\Delta S}$$

#	ΔS [mm]
1	2,4
2	2,4
3	2,5
4	2,7
5	2,6
6	2,9
7	2,4
8	2,5
9	2,7
10	2,5

$$2,51 \pm 0,15 \times 10^{-3} \text{ m}$$

↓
~6%

$$\frac{24 \cdot (4,95)^2 \cdot \pi \cdot 640}{0,0025}$$

$$0,0025$$

$$3,25 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}$$

Lichtgeschwindigkeit

Messung:
(astronomisch)

Ole Rømer (Dän): 1676, Jupitermonde,
Schwankungen in den Umlaufperioden,
berechnete Wert für c : $214.000 - 300.000$ km/s
(Umlaufperioden um 1000 bzw. 1400 s vertriebt)

James Bradley: 1728, Lichtstrahl braucht



Zeit um Teleskop zu durchlaufen: dadurch erscheint es etwas flach weil sich die Erde bewegt.

Aberration $\Rightarrow c$ berechnet: 99% Genauigkeit

Messung:
(Labor)

Galileo Galilei: 1600, Blindkammer; 100 m funktionierte nicht wegen Reaktionszeit der Menschen

Jules Hippolyte Louis Foucault: 1849, dreiseitiges

Fahrrad, mehrere km, Spiegel
je nach v von Fahrrad \Rightarrow Höhe oder Bahn; Werte war 5% zu groß

Léon Foucault: 1850, Drehspiegel-Methode
Materialabhängigkeit von c

Albert Abraham Michelson u. Edward Morley: 1887
Ätherwind: Konstanz von c

Materialabhängigkeit

$$c_{\text{VAKUUM}} = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$n = \frac{c_{\text{VAKUUM}}}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

relative Permittivität

Permittivitätszahl

beide Konst. sind für die elektromagnetischen Eigenschaften von Materialien

$$n = \frac{c_{\text{VAKUUM}}}{c_{\text{MATERIAL}}} = \text{Brechzahl}$$

Luft	1,000292
H ₂ O	1,33
Glas	1,5 - 1,9
Diamant	2,47

Theoretisch: Man kann nur 2-Wege-Lichtgeschw. messen
 $A \rightarrow B \rightarrow A$

Einweg nicht messbar, da Strom in A u. B unterschiedl. messbar
 nur möglich: davon Hinweis über c erforderlich
 Relativitätstheorie: c konstant und

unabhängig vom Bezugssystem

Cherenkov-Strahlung: ^{geladene} Teilchen mit $v > c$ in Medium:

beachtliche Atome kurz polarisiert

in $v < c_m \Rightarrow$ destruktive Interferenz

$v > c_m \Rightarrow$ „Überkopf“ aus Photonen

$$\sin(\theta) = \frac{c_m}{v} = \frac{1}{n\beta}$$

$$v = \beta c$$



$$c_m = \frac{c}{n}$$

$B > 1$

Anwendung: Wasserhammer

Kernreaktor

(Anzahl der Kernspaltungen)

Teilchenphysik

kosmische Teilchen (Hyperonen, Neutrinos)

Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkraft

Wir betrachten zunächst ein Koordinatensystem $O'(i', j', k')$, das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\phi/dt$ relativ zu einem Inertialsystem $O(i, j, k)$ rotiert. Die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme sollen zusammenfallen, $O = O'$. Die Rotation erfolge um eine Achse, die durch den Einheitsvektor n gegeben ist. (s. die Abbildungen 1 und 2).

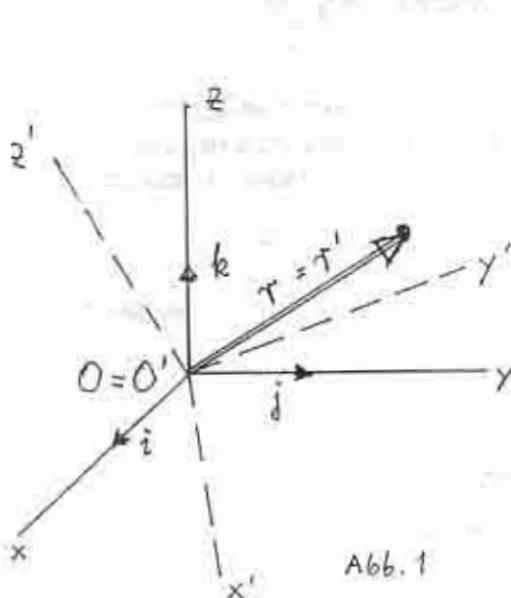


Abb. 1

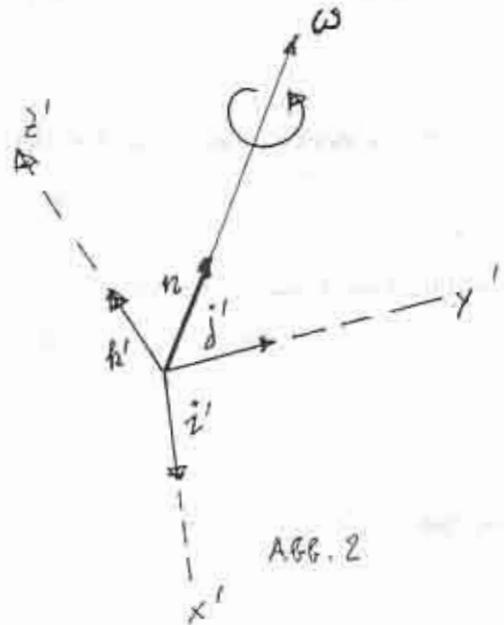


Abb. 2

Sie kann durch den Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \omega n \quad (1)$$

beschrieben werden (Rechte Hand-Regel!). Die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme sollen zusammenfallen, $O = O'$. Somit gilt für einen beliebigen Radiusvektor

$$r = xi + yj + zk = x'i' + y'j' + z'k' = r' \quad (2)$$

Differenziert man nach der Zeit, so muß man berücksichtigen, daß die Einheitsvektoren i', j', k' des rotierenden Systems nicht konstant sind:

$$\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k = \frac{dx'}{dt}i' + \frac{dy'}{dt}j' + \frac{dz'}{dt}k' + x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt} \quad (3)$$

Die drei Terme auf der linken Seite sind der Geschwindigkeitsvektor v im Inertialsystem. Die ersten drei Terme auf der rechten Seite geben die Komponenten der Geschwindigkeit v' im rotierenden System. Somit hat man

$$v = v' + x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt} \quad (4)$$

Die drei letzten Terme auf der rechten Seite beschreiben die Geschwindigkeit von r auf Grund der Rotation der Einheitsvektoren i', j', k' . Wie Abb. 3 zeigt, gilt z. B. für i' :

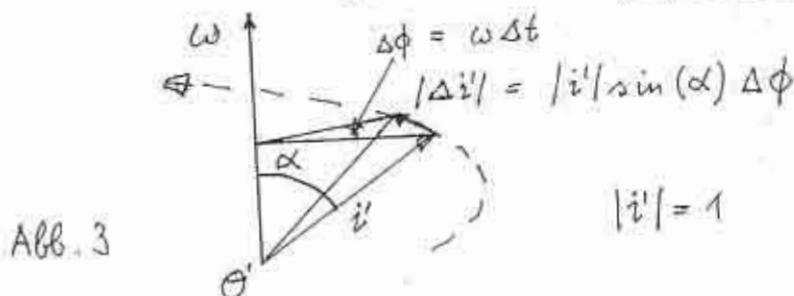


Abb. 3

$$|\Delta \mathbf{i}'| = \sin(\alpha) \Delta \phi; \quad \Delta \phi = \omega \Delta t, \quad (5)$$

wobei α den Winkel zwischen ω und \mathbf{i}' bedeutet. Somit kann man

$$\left| \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{i}'}{\Delta t} \right| = \omega \sin(\alpha) = |\omega| |\mathbf{i}'| \sin(\omega, \mathbf{i}') \quad (6)$$

unter Berücksichtigung der rechten Hand-Regel als Vektorprodukt schreiben:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \omega \times \mathbf{i}'. \quad (7)$$

Völlig analog erhält man für die beiden anderen Einheitsvektoren:

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \omega \times \mathbf{j}'; \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \omega \times \mathbf{k}'. \quad (8)$$

Kombiniert man diese Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} &= x'(\omega \times \mathbf{i}') + y'(\omega \times \mathbf{j}') + z'(\omega \times \mathbf{k}') \\ &= \omega \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') \\ &= \omega \times \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (9)$$

Beachten Sie, daß wegen Gleichung (2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ gilt. Die Gleichung (4) kann abgekürzt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}' \quad (10)$$

geschrieben werden. Somit haben wir¹

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{fest} &= \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{rot} + \omega \times \mathbf{r}' \\ &= \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_{rot} + \omega \times \right] \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (11)$$

Die letzte Gleichung besagt, daß die Zeitableitung des Positionsvektors im festen System der Zeitableitung im rotierenden System *plus* einer Vektorproduktoperation $\omega \times$ entspricht. Man sieht sofort ein, daß dies auch für einen beliebigen Vektor $\mathbf{q} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ gelten muß (da er z.B. als Differenz von zwei Radiusvektoren geschrieben werden kann):

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_{fest} = \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_{rot} + \omega \times \mathbf{q}. \quad (12)$$

Wenn $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ gesetzt wird, so ist $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}'$. Die Geschwindigkeiten $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt)_{fest}$ im festen Laborsystem und $\mathbf{v}' = (d\mathbf{r}'/dt)_{rot}$ im rotierenden System stimmen somit nicht überein. Überlegen Sie, wie diese Geschwindigkeitsvektoren beim Drehtellerversuch aussehen. Beachten Sie, daß Geschwindigkeiten stets Tangentialvektoren zur Bahnkurve sind.

Wenn $\mathbf{q} = \mathbf{v}$ gesetzt wird, so haben wir für die Beschleunigungen

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{fest} = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_{rot} + (\omega \times \mathbf{v}). \quad (13)$$

¹ Beachten Sie, daß $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ gilt.

Wegen $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{fest} &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{rot} [\mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{rot} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (14)\end{aligned}$$

Da wir ein konstante Rotationsgeschwindigkeit annehmen, ist $(d\boldsymbol{\omega}/dt)_{fest} = (d\boldsymbol{\omega}/dt)_{rot} = 0$. Weiters ist $\mathbf{v}' = (d\mathbf{r}'/dt)_{rot}$. Bezeichnen wir die Beschleunigung im festen System mit $\mathbf{a} = (d\mathbf{v}/dt)_{fest}$, und die Beschleunigung im rotierenden System mit $\mathbf{a}' = (d\mathbf{v}'/dt)_{rot}$, so lautet das Endergebnis:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (15)$$

Die Beschleunigung im rotierenden System wird somit:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + 2(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}). \quad (16)$$

Der Term

$$\mathbf{a}_C = 2(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}) \quad (17)$$

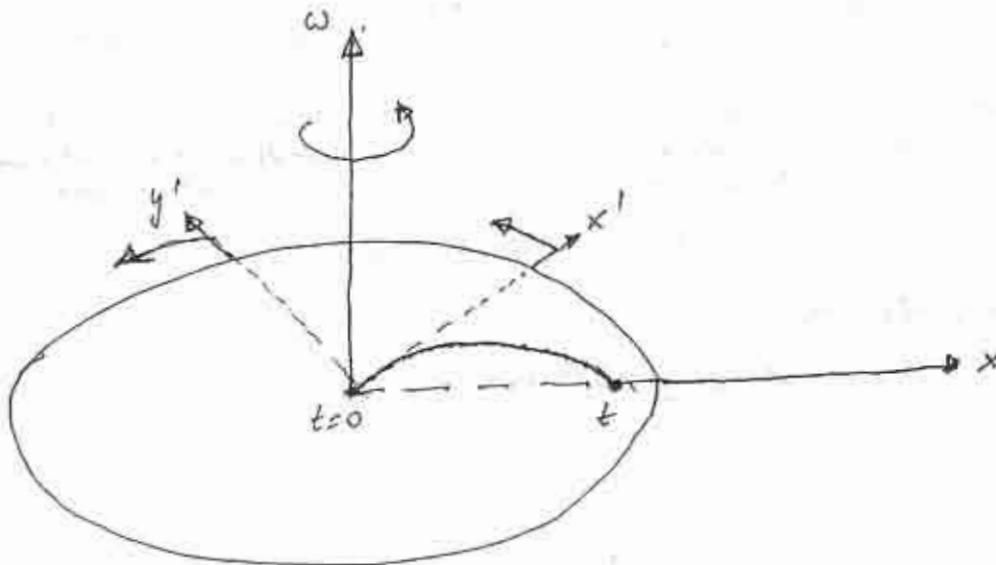
heißt Coriolisbeschleunigung. Der Term

$$\mathbf{a}_{ZF} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}) \quad (18)$$

heißt Zentrifugalbeschleunigung.

Rotierendes Koordinatensystem: Drehtisch

Ein Massenpunkt (Kugel) bewegt sich auf einem horizontalen Tisch, der sich um eine vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = (0, 0, \omega)$ dreht. Die Koordinaten des Massenpunktes im Laborsystem seien $\mathbf{r} = (x, y, 0)$, die Koordinaten im rotierenden System des Tisches seien $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$. Gemäß Abb. 1 gilt $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.



Im festen Laborsystem bewege sich der Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit entlang der raumfesten x -Achse:

$$x(t) = vt; \quad y(t) = z(t) = 0 \quad (19)$$

Zu Zeitpunkt $t = 0$ sollen die x und x' Achsen übereinstimmen.

Im rotierenden System erfährt der Massenpunkt eine Beschleunigung

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + 2(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}), \quad (20)$$

wobei $\mathbf{v}' = (dx'/dt, dy'/dt, 0)$ die Relativgeschwindigkeit im rotierenden System bedeutet. Für die Komponenten erhält man von Gl. (20):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= 2\omega \frac{dy'}{dt} + \omega^2 x' \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} &= -2\omega \frac{dx'}{dt} + \omega^2 y' \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Als Lösungen dieser Bewegungsgleichungen findet man:

$$\begin{aligned} x'(t) &= vt \cos(\omega t) \\ y'(t) &= -vt \sin(\omega t) \\ z'(t) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Bahn im raumfesten System.

Demonstrationsbeispiele

WS

Corioliskraft:

Wenn sich ein Körper relativ zu einem rotierenden Bezugssystem bewegt, dann wirkt auf ihn eine zusätzliche Trägheitskraft. Diese Kraft heißt Corioliskraft.

Experiment:

Auf einer waagrecht rotierenden Drehscheibe (Winkelgeschw. ω) wird radial eine Kugel (Masse m) mit einer Anfangsgeschw. v relativ zur Drehscheibe bewegt. Die Reibung der Kugel wird vernachlässigt. Ein außerhalb der Drehscheibe stehender Beobachter B_1 sieht eine gleichförmig geradlinige Bewegung der Kugel in Übereinstimmung mit dem 1. Newton'schen Axiom (Trägheitsatz).

Ein Beobachter B_2 auf der Drehscheibe stellt dagegen fest, daß sich die Kugel längs einer gekrümmten Bahn fortbewegt, also eine beschleunigte Bewegung (Beschleunigung b_c) ausführt. Gemäß 2. Newton'schen Axiom macht er dafür eine Kraft $K_c = m \cdot b_c$ (Corioliskraft) verantwortlich.

Beobachter B_1 :



Beobachter B_2 :



Berechnung der Corioliskraft:

Man betrachtet die Kugel im kurzen Zeitintervall Δt unmittelbar nach dem Abwurf. In dieser Zeit legt sie einen Weg $\Delta r = v \Delta t$ zurück, während sich die Drehscheibe um den Winkel $\omega \Delta t$ weiterdreht.

Die Kugel befindet sich am Ende des Zeitintervalls Δt im Punkt P. Beobachter B_2 erwartet sie dagegen im Pkt. Q. Die Abweichung kann durch b_c ausgedrückt werden:

$PQ = \frac{b_c}{2} (\Delta t)^2$ (b_c annähernd konstant im Zeitintervall Δt).

Daneben gilt sichtlich:

$PQ = \Delta r \cdot \omega \Delta t = v \omega (\Delta t)^2$.

Damit durch Vergleich:

$\frac{b_c}{2} (\Delta t)^2 = v \omega (\Delta t)^2 \Rightarrow b_c = 2v\omega$

$k_c = m \cdot b_c = 2m \cdot v \omega$.

Richtung und Richtungssinn der Corioliskraft:

Sichtlich gilt: ($\vec{\omega}$ zum Betrachter gerichtet)
 $\vec{K}_c \perp \vec{v}$, $\vec{K}_c \perp \vec{\omega}$, $\vec{v}, \vec{\omega}, \vec{K}_c$ bilden ein Rechtssystem.

Damit erhält man schließlich:

$\vec{K}_c = 2m \cdot \vec{v} \times \vec{\omega}$.

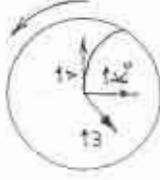
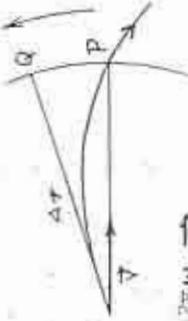
Bedeutung der Corioliskraft:

Entstehung der Passatwinde, Luftwirbel im Hoch- und Tiefdruckgebiete, einseitige Erosion von N-S-verlaufenden Flüssen, einseitige Abnutzung von Eisenbahnschienen, Abweimung von Geschossen.

Literatur:

Gerthsen, Grimschl - Tomasehek.

Analogiebeispiel: Ablenkung eines Geschosses, das aus dem Zentrum eines rotierenden Systems abgeschossen wird (Drehschema) als rotierendes System. Luftdruckpistole im Zentrum



Zentrifugalkraft

Ein Körper, auf den keinerlei Kräfte wirken, bleibt nach dem 1. Newtonschen Axiom entweder in Ruhe oder in gleichförmig geradliniger Bewegung. Die Bewegung eines Körpers entlang einer gekrümmten Bahn setzt daher voraus, daß auf ihn eine Kraft wirkt. Bewegt sich der Körper der Masse m mit gleichförmiger Geschwindigkeit (konstante Winkelgeschwindigkeit ω) so erfährt er eine Radialbeschleunigung $a_r = \frac{v^2}{r}$. Die zum Zentrum des Krümmungskreises (r) gerichtete, auf den Körper wirkende Kraft nennt man Zentripetalkraft (K_{ZP}):

$$\vec{K}_{ZP} = -m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

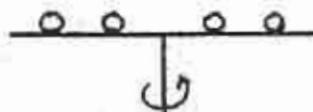
Diese Kraft bewirkt bei der Tangentialgeschwindigkeit nur eine Richtungsänderung aber keine Betragsänderung.

Im Fall einer Bewegung mit ungleichförmiger Geschwindigkeit erfährt der Körper sowohl die Radialbeschleunigung als auch die Bahnbeschleunigung (Tangentialbeschleunigung). Daher wirken auf den Körper zwei Kräfte, die Zentripetalkraft (Radialkraft) und die Tangentialkraft in Richtung der Bahn.

In einem mit dem Körper mitrotierenden Koordinatensystem befindet sich der Körper in Ruhe. In einem solchen (beschleunigten) Koordinatensystem muß daher eine an den Körper angreifende Trägheitskraft wirken, die Zentrifugalkraft. Diese hält der Zentripetalkraft das Gleichgewicht. Sie ist dem Betrag nach gleich groß wie die Zentripetalkraft, weist aber vom Kreismittelpunkt weg.

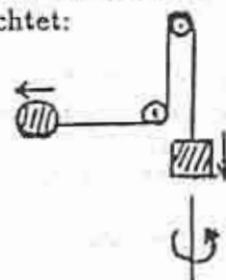
Experimente:

(1) Kugeln sind in Vertiefungen einer rotierenden Scheibe aufgelegt; mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit werden erst die äußeren, dann die inneren Kugeln weggeschleudert (Prinzip der Zentrifuge).

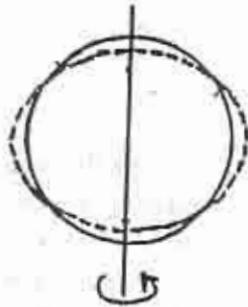


(2) Ein konstantes Gewicht in der Rotationsachse befestigt wird durch die Zentrifugalkraft einer Kugel gehoben, folgende Fälle werden betrachtet:

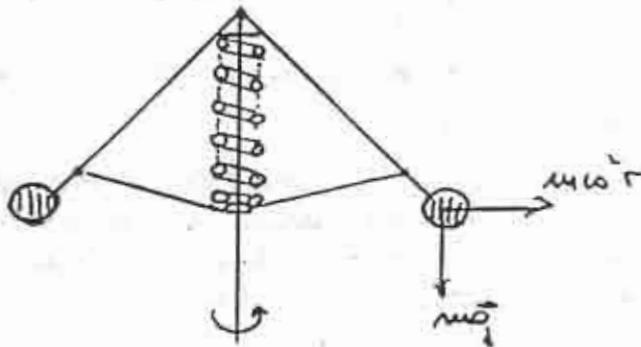
- a) $mr\omega^2 < \text{Gewicht}$
- b) $mr\omega^2 = \text{Gewicht}$ (labiles Gleichgewicht)
- c) $mr\omega^2 > \text{Gewicht}$



(3) Geoid-Modell (Abflachung der Erdpole)



(4) Der Summe aus Kugelgewicht (konstant) und Federkraft (proportional zur Auslenkung) wird durch die Zentrifugalkraft das Gleichgewicht gehalten. Mit steigender Winkelgeschwindigkeit öffnen sich die Schenkel und die Feder wird zusammengedrückt (Zentrifugalregler).



Literatur:

R.W. Pohl, Einführung in die Physik, Bd. 1, Springer 1964, p.82 ff
L. Bergmann, Cl. Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd.1

Flüssigkeitsoberfläche im rotierenden System

Im Gegensatz zu festen Körpern stellt sich die freie Oberfläche von Flüssigkeiten stets senkrecht zur wirkenden Kraft.

Ist die äußere Kraft nur die Schwere, so muß sich der Flüssigkeitsspiegel horizontal einstellen. (Bei großen Wasserflächen - Seen, Meere - ist die Oberfläche gekrümmt, da die Schwerkraftsrichtungen an weit auseinander liegenden Punkten nicht mehr parallel sind, sondern zum Erdmittelpunkt zeigen).

Wirken außer der Schwerkraft noch weitere Kräfte auf die Flüssigkeit, so muß sich die freie Oberfläche senkrecht zur Resultierenden sämtlicher Kräfte stellen.

Rotiert ein kreiszylindrisches Gefäß, teilweise gefüllt mit Flüssigkeit, mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Zylinderachse, so wird sich nach einem Anlaufvorgang ein Gleichgewichtszustand einstellen, bei dem die Flüssigkeit als Ganzes mit dem Gefäß rotiert, also keine Relativbewegungen der einzelnen Volumenelemente stattfinden.

Auf die einzelnen Volumenelemente mit der Masse dm wirken nun:

$$\vec{K}_1 = \vec{g} \, dm \quad \text{Schwerkraft}$$

$$\vec{K}_2 = \omega^2 \vec{r} \, dm \quad \text{Zentrifugalkraft}$$

Diese beiden Kräfte setzen sich zu einer Resultierenden \vec{K} zusammen, auf die sich die Oberfläche normal einstellt.

Legt man ein Koordinatensystem mit z- und r-Achse, so liest man für einen beliebigen Punkt P der Flüssigkeitsoberfläche folgende Beziehung ab:

$$\text{tg } \alpha = \frac{|\vec{K}_1|}{|\vec{K}_2|} = \frac{g \, dm}{r \, \omega^2 \, dm} = \frac{g}{r \, \omega^2}$$

wenn α die Neigung der Oberfläche in P gegen die Achse bedeutet. Andererseits ist, wenn man r als $r=r(z)$ z f. a. b. t.,

$$\text{tg } \alpha = \frac{dr}{dz}$$

also auch $\frac{g}{r \, \omega^2} = \frac{dr}{dz}$; oder $\frac{g}{\omega^2} dz = r \, dr$

woraus durch Integration folgt:

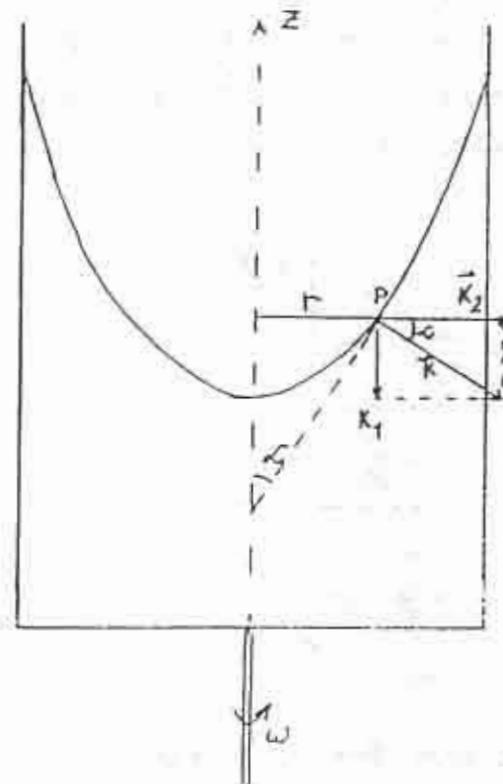
$$\frac{g}{\omega^2} z = \frac{1}{2} r^2 + \text{const}$$

Die Randbedingung $z = 0$ für $r = 0$ liefert $\text{const} = 0$, daher: $z = \text{const} \cdot r^2$

Dies ist die Gleichung einer in Richtung der z-Achse geöffneten Parabel. Die Oberfläche nimmt also bei Rotation die Form eines Rotationsparaboloides an.

Diese Oberfläche stellt eine NIVEAUFLÄCHE dar, also eine Fläche konstanter potentieller Energie. Das heißt, daß sich darauf Körper genau so verhalten wie auf einer ebenen Flüssigkeitsoberfläche, die nur der Schwere unterliegt. Bringt man einen Körper, der etwa das spez. Gewicht des Wassers hat, auf diese Oberfläche, so verbleibt er an dieser Stelle und rotiert gemeinsam mit dem ganzen System.

Lit.: Bergmann-Schäfer, Bd. I Lehrbuch der Experimentalphysik p225 ff



Foucaultscher Pendelversuch

Einen besonders einfachen Beweis für die Rotation der Erde bietet der "Foucaultsche Pendelversuch" (von Viviani 1661 erstmals beobachtet, von Foucault 1850 wiederentdeckt).

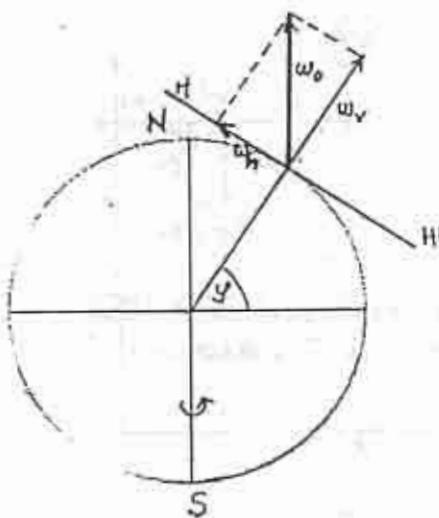
Ein schwingendes Pendel behält infolge der Trägheit seine Schwingungsebene im Raum bei. Wegen der Erdrotation scheint sich daher die Pendelebene für den auf der Erde stehenden Beobachter zu drehen.

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist gegeben:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24} \cdot h^{-1} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

Am Nordpol würde die Schwingungsebene in 24 Std. (genauer: in einem Sterntag) eine volle Umdrehung im Uhrzeigersinn ausführen.

Für einen Beobachter an einem Ort P mit der geogr. Breite φ folgt aus Abb. 1:



HH' sei die Horizontalebene, im Punkte P lässt sich die Winkelgeschwindigkeit ω_0 in zwei Komponenten zerlegen: eine vertikale Komponente ω_v

$$\omega_v = \omega_0 \sin \varphi$$

und eine horizontale Komponente ω_h

$$\omega_h = \omega_0 \cos \varphi$$

Für die Drehung der Pendelebene verantwortlich ist die vertikale Komponente:

$$\omega_v = \omega_0 \sin \varphi$$

Für unsere Breite von $\varphi = 48^\circ$ ergibt sich für die Drehung der Schwingungsebene des Pendels in einer Stunde: $\omega_v = \frac{360}{24} \sin 48^\circ$, das sind $11^\circ/h$ gegenüber $15^\circ/h$ am Pol.

Am Äquator stellt man keine Ablenkung fest, weil die Vertikal-komponente ω_v gleich Null wird ($\sin 0^\circ = 0$).

Auf der südl. Halbkugel liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt.

Dort wird ein Drehen der Pendelebene gegen den Uhrzeigersinn beobachtet

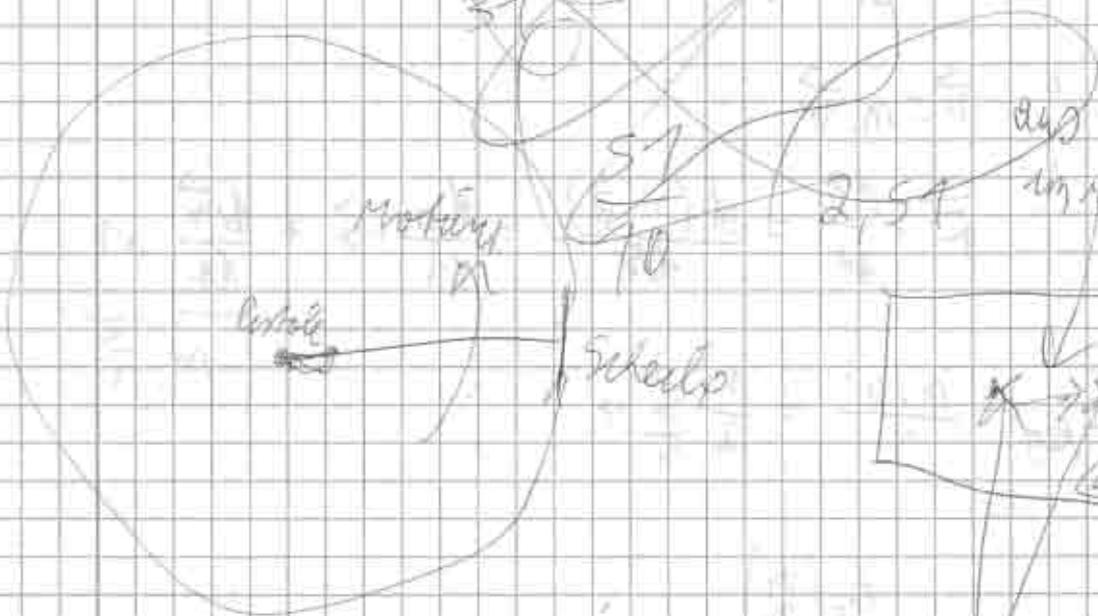
Lit.: Bergmann-Schaefer: Experimentalphysik, Teil 1, S 182 ff

Pohl: Mechanik, S 94

Westphal: Physik S 96 ff

Corioliskraft

$$F_{\text{Cor}} = 2 \cdot v \cdot \omega = 2 \cdot 14 \cdot 16 = 20$$



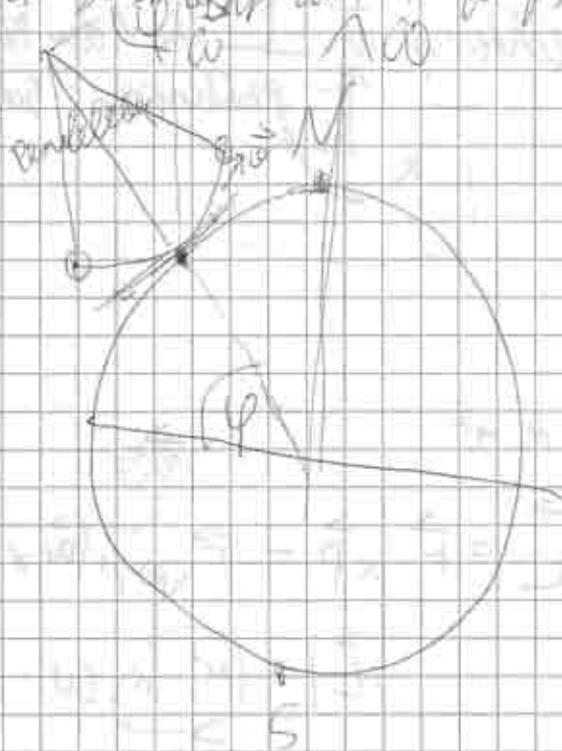
auf Sicht des Beobachters im rotierenden System muss ein Kraft gemessen werden



in Rotation nach links → Rechtsabweichung

Pfeil trifft in Karte hier

Die Führungskräfte üben keine Arbeit → weil senkrecht zum Bewegungsvektor



\vec{F}, \vec{s}

Weg

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

m $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{m \cdot \vec{a}}$$

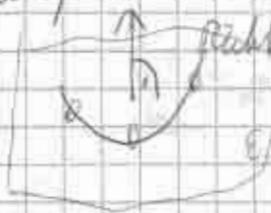
$$E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 v_i^2$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

φ

$\vec{\omega}$ $|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$

Richtung $\vec{\omega} \perp$ Ebene der Rotationsrichtungen: Schraubensystem



$I = m \cdot r^2$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = (m \cdot \vec{r} \times \vec{v})$$

$|\vec{L}| = I \cdot \omega$

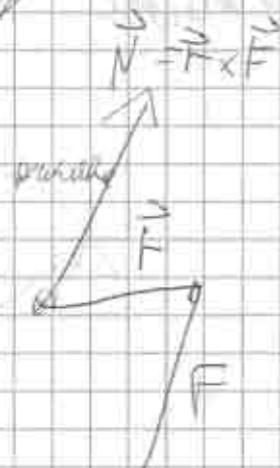
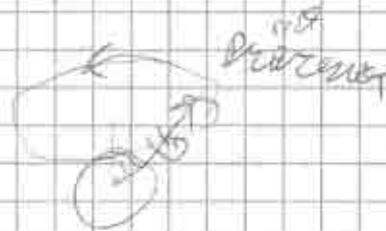
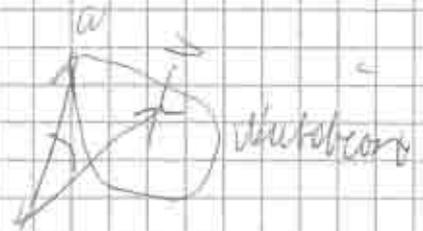
$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \vec{I} \vec{\omega} \quad \vec{L} \perp \vec{\omega}$$

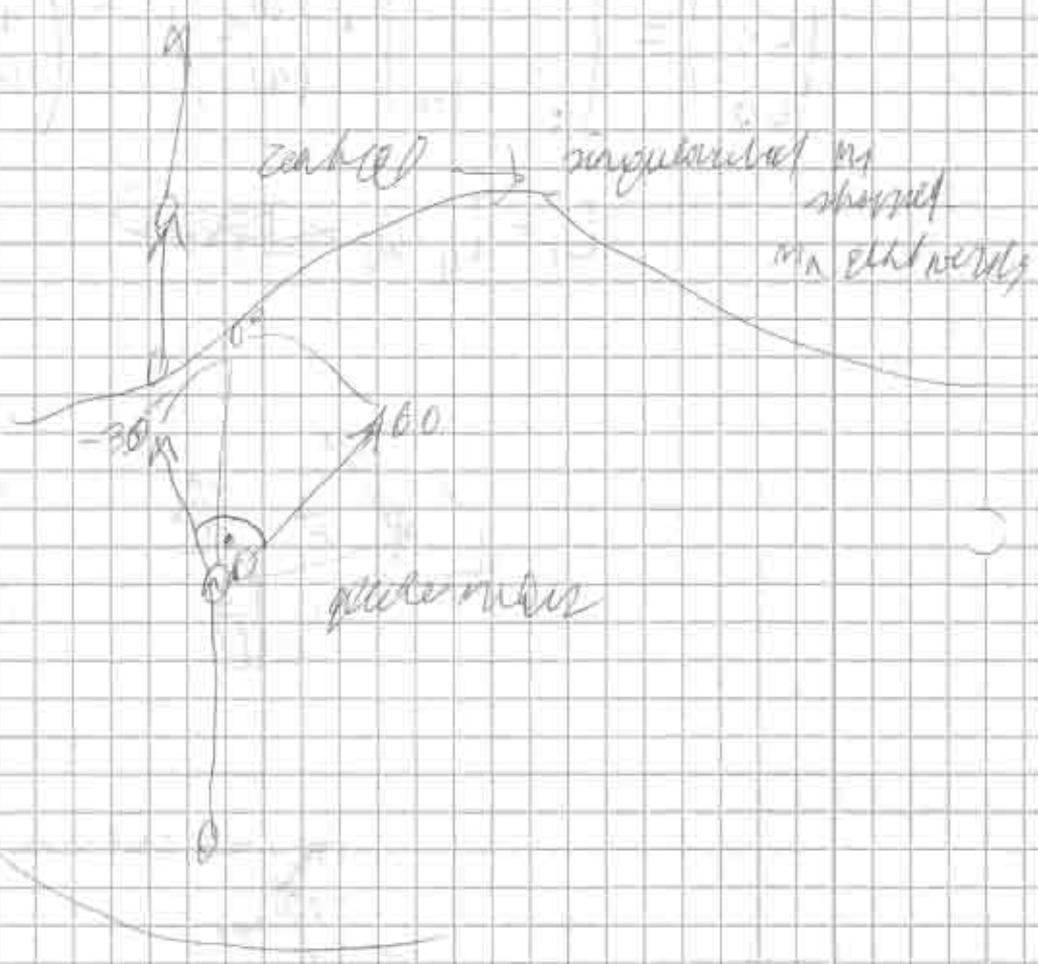
$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \\ I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{32}\omega_3 \\ I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$L_i = I_{ij} \omega_j$$

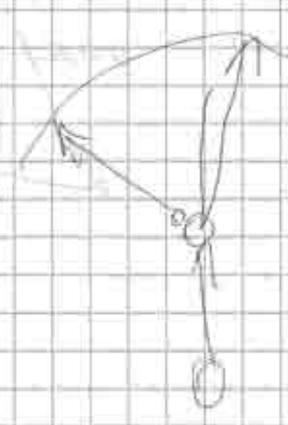


Drehachse und Winkel
 Drehmoment
 (senkrecht zur Drehachse)
 \Rightarrow (parallel zum Drehmoment)

Stöße auf Vertikale



unvollständige Masse



einwirkende Masse < ruhende Masse
 Sonderfall Winkel 0° \rightarrow $\leq 90^\circ$

Abstoßende Masse > ruhende Masse
 \rightarrow $> 90^\circ$

Sonderfall Winkel 180°

Wicht bei Fernwirkung (übergriffe) gleiche Winkel

Methoden der Experimentalphysik: Die Erhaltungssätze für Impuls & Drehimpuls

1 Vorgeführte Experimente

1.1 Impuls (Airtable-Experimente)

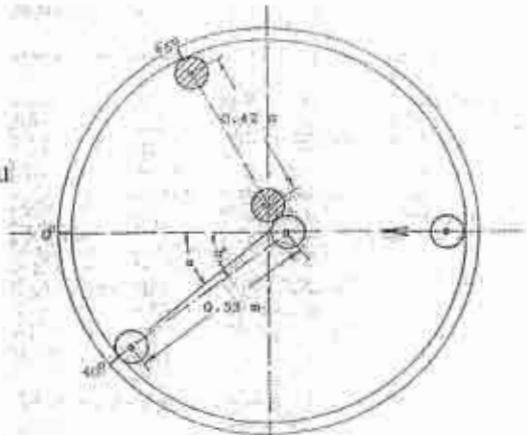
1.1.1 Allgemeines

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_3 \vec{v}_3 + m_4 \vec{v}_4 \quad \text{Impulserhaltung}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 \quad \text{Energieerhaltung}$$

(1)

darin: 1,2 (3,4) = Teilchen vor (nach) dem Stoß



1. Zentraler elastischer Stoß

(1) führt auf:

$$v_3 = \frac{m_1 v_1 + m_2 (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}, \quad v_4 = \frac{m_2 v_2 + m_1 (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Beobachtung:

- Stoßender Puck bleibt liegen ($v_3 = 0$)
- Gestoßener Puck fliegt fort mit ($v_4 = v_1$)

2. Zentraler inelastischer Stoß

Impulsgleichheit vorher/nachher, Paar fliegt gemeinsam weiter $M = m_1 + m_2$, kinetische Energie teils umgesetzt in Wärme oder potentielle Energie...

$$\Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

3. Nichtzentraler elastischer Stoß, mit gleichen Massen, Bezugssystem $v_2 = 0$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3 + \vec{v}_4$$

$$\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 = \vec{v}_3^2 + \vec{v}_4^2$$

Gehe in Bezugssystem $\vec{v}_2 = 0$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_3 + \vec{v}_4$$

$$\vec{v}_1^2 = \vec{v}_3^2 + \vec{v}_4^2$$

Das ist der Satz des Pythagoras mit v_3 und v_4 als Katheten

⇒ Die Massen fliegen unter 90° auseinander

4. nicht-zentraler elastischer Stoß mit $1/r^3$ Potential (magnetische Pucks)

- Beispiele aus der Wissenschaft
 - Swing-by von Satelliten ($1/r$ -Potential)
 - Rutherfordstreuung von He-Kernen an Goldfolie ($1/r$ -Potential)
 - Van der Waals-Stöße in Atominterferometern ($1/r^3$ -Potential)

5. nicht-zentraler inelastischer Stoß

Puckpaar wird in Rotation versetzt. Beachte Drehimpulserhaltung!

1.1.2 Demonstrationen

stets $v_2=0$:

- elastischer gerader Stoß: Variiere Masse und untersuche Impulserhalt
 - Qualitativ : $m_1 < m_2$, Puck 1 wird reflektiert
 $m_1 = m_2$, Puck 1 steht
 $m_1 > m_2$, Puck 1 und Puck 2 treiben vorwärts
 - Quantitativ : Stoppe Zeiten ⇒ Berechne Geschwindigkeiten ⇒ Verifiziere Impulserhaltung.
- elastischer schiefer Stoß:
 - Qualitativ : Messe Winkel und prüfe, dass gleiche Massen stets unter 90° auseinander gehen.
- unelastischer schiefer Stoß:
 - Qualitativ : betrachte Drehrichtung des Gesamtsystems, in Abhängigkeit von Vorzeichen des Stoßparameters.
- elastischer magnetischer Stoß mit $1/r^3$ -Potential:
 - Qualitativ : betrachte anziehende und abstoßende Potentiale.

- **Kräftefreier Kreisel:** Kein Drehmoment, d.h. $\vec{T} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$.
Die Drehimpulsachse und für den symmetrischen Kreisel damit auch die Figurenachs
behalten ihre Lage im Raum bei.
- **Drehmoment auf Kreisel:** $\vec{T} \neq 0 \Rightarrow d\vec{L} = \vec{T} \cdot dt$. (s. Fig. 3)
Der Änderung des Drehimpulsvektors ist parallel zum Vektor des Drehmoments.

o **Beispiel:** Die Schwerkraft $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$, die im Massenmittelpunkt m des Kreisels angreift, bewirkt bzgl. des Drehpunktes A ein Drehmoment:

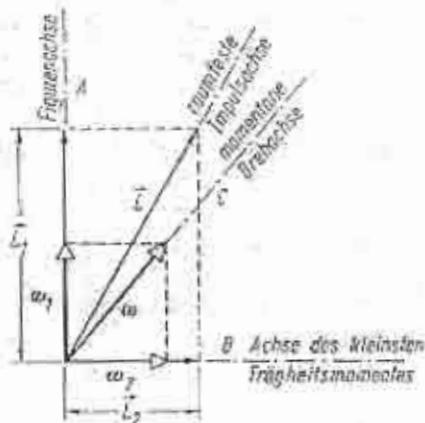
$$\vec{T} = m \cdot \vec{r} \times \vec{g} \quad (3)$$

Damit dreht sich $\vec{L} \rightarrow \vec{L}_1$, was wiederum aufgrund des geänderten Radiusvektors ein neues Drehmoment \vec{T}_1 bewirkt. Der Endpunkt des Drehimpulsvektors \vec{L} , vollführt somit eine **Kreisbewegung (Präzession)** senkrecht zur z-Achse mit der Kreisfrequenz

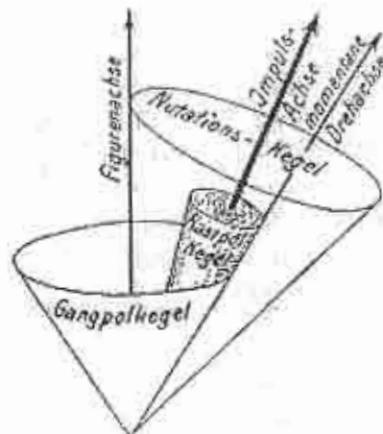
$$|\vec{\Omega}| = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}| \sin \alpha} = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{L}| \sin \alpha} \quad (\text{siehe Skizze})$$

Mit $d\phi = d\theta \cdot \sin \alpha$, $|d\vec{L}| = |\vec{L}| \cdot d\phi$

sieht man: $|\vec{T}| = |\vec{\Omega}| \cdot |\vec{L}| \sin \alpha \Leftarrow \vec{T} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (4)$



Festlegung der drei Kreiselachsen



Die drei Kreiselachsen

1.2.4 Weitere Beispiele

- *Gyroskop : Beobachtung der Präzession*

- Drehmoment durch Erdrotation bewirkt Ausrichtung der Kreiselachse parallel zur Nord/Südachse. Warum ist die Reibung in den Gelenken hier wichtig?
- **Experimentator auf Drehstuhl mit Fahrradreifen:**
 - mit drehendem Fahrradreifen in der Hand, Präzession und Drehimpulserhalt „spürbar“

1.2.5 Experimente am Luftkreisel: Präzession

- *Kreisel ohne äußere Kräfte* (austariert): (Nachweis des Drehimpulserhalts)
 - bleibt orientiert!
- *Kreisel mit gravitativem Drehmoment, drehend im Uhrzeigersinn:* (Nachweis von Gl. (4))
 - *positives Moment:* kann erzeugt werden durch Verschiebung des Gewichts weg vom Drehpunkt \Rightarrow Präzession zu beobachten gg. Uhrzeigersinn
 - *negatives Moment:* kann erzeugt werden durch Verschiebung des Gewichts zum Drehpunkt \Rightarrow Präzession im Uhrzeigersinn
- Betrachte qualitativ: Einfluss von
 - Drehmoments (Lage der Gewichte, Winkel)
 - Kreisfrequenz ω des Kreisels
 - Drehrichtung des Kreisels
 auf Präzessionsfrequenz und -richtung
- Beobachte und erkläre: Kreisel folgt Handkontouren oder einem äußeren Stab

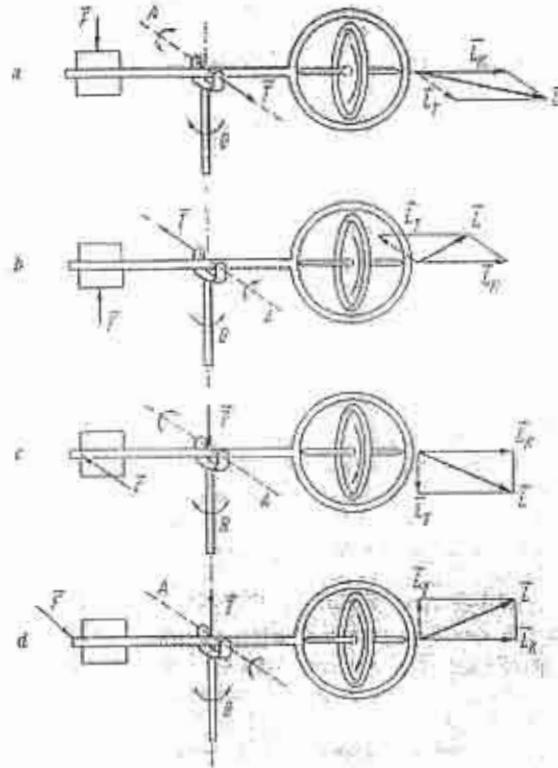
1.2.6 Experimente am Luftkreisel: Nutation

Unter der Nutation des Kreisels versteht man eine der Präzessionsbewegung periodisch überlagerte Schwankung der Figurenachse. Die Nutation wird mithilfe eines luftgelagerten (Kugel-)Kreisels demonstriert, da sie dort praktisch ungedämpft bleibt.

- Anfangsbedingung: Kräftefreier Kugelkreisel, Figurenachse fest \Rightarrow weder Präzession noch Nutation
- Anfangsbedingung: **Figurenachse bekommt Impulskick** (z.B. alleine schon durch Loslassen der Achse, wg. Gravitation)
 - Die Figurenachse beschreibt nun einen Nutationskegel
 - Die Richtung der Nutationsbewegung hängt ab von der Drehrichtung des Kreisels

1.2.7 Präzession + Nutation

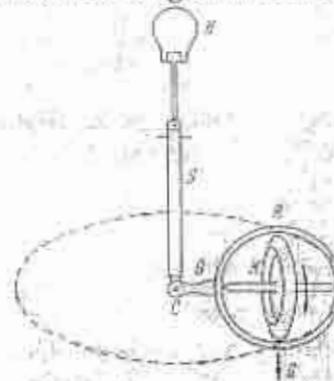
- Nach Anwerfen und Loslassen des Kreisels gibt es im allgemeinen eine kombinierte Präzessions/Nutationsbewegung
- Man beachte, dass sich die Figurenachse nach dem Loslassen ein wenig senkt. Das ist kein Reibungseffekt sondern u.a. energetisch bedingt. Je schneller die Präzession (d.h. je langsamer die Eigendrehung des Kreisels), desto tiefer sinkt der Schwerpunkt des Körpers.



- **Kreisel am Seil/an Stange**

- zeigt, dass Kreisel trotz Gewichtskraft seitlich ausgelenkt bleibt und präzediert.

Nachweis der Kreiselpräzession

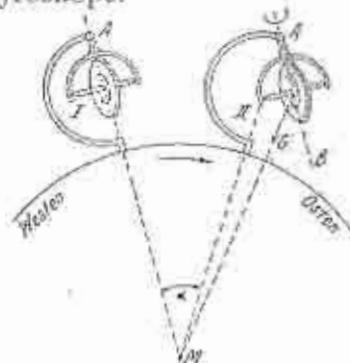


- **Kreisel in Spirale:**

- Kreisel läuft an Wand entlang. Analog zu Luftkreisel an Handkontur.

- **Flugzeugkreisel:**

- Aus Navigationssystem eines Flugzeugs. Mechanische Kreisel zunehmend abgelöst durch Lasergyroskope.



Prinzip des Kreiselkompasses

- **Nordsuchender Kreisel:**

Bestimmung der Zähigkeit einer Flüssigkeit

a) Hintergrund

Eine Standardmethode zur Bestimmung der Zähigkeit η_n einer Flüssigkeit nützt das Stokes'sche Widerstandsgesetz. Dieses Gesetz beschreibt die Reibungskraft, die auf einen kugelförmigen Körper wirkt, der sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit durch das Medium bewegt. Dieses Gesetz gilt nur für laminare Strömungsverhältnisse und streng genommen nur für Reynoldszahlen $Re < 1$, mit

$$Re = \frac{\rho_n v d}{\eta_n}$$

$$\frac{kg \cdot m \cdot s^{-1} \cdot m}{m^3 \cdot s \cdot kg} = \frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}{m^3 \cdot kg} = \frac{1}{m \cdot s}$$

wobei ρ_n die Dichte des Mediums, v die Geschwindigkeit und d eine charakteristische Größe, hier den Durchmesser der Kugel bezeichnet.

Das Stokes'sche Gesetz für die Reibungskraft F_R lautet

$$F_R = 3\pi\eta_n d v.$$

Läßt man nun einen kugelförmigen Körper in einer Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwerkraft zu Boden fallen, so stellt sich nach kurzer Zeit ein Kräftegleichgewicht zwischen Schwerkraft G , Auftriebskraft A und Widerstandskraft F_R ein, und die Kugel bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Aus

$$G - A = F_R$$

ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\eta_n = \frac{d^2(\rho_k - \rho_n)g}{18v} \quad \text{mit} \quad v = \frac{\Delta x}{t}$$

$$\frac{m^2 \cdot s^{-2} \cdot kg \cdot m^{-3}}{m \cdot s} = \frac{kg}{m \cdot s}$$

mit Δx die Länge der Fallstrecke, t die Fallzeit, ρ_k die Dichte des Kugelmaterials und g der Erdbeschleunigung.

Sollte der Durchmesser D des Gefäßes (in unserem Fall ein Messzylinder) nicht sehr groß gegen den Kugeldurchmesser d sein, muss F_R noch mit einem Korrekturfaktor k_L multipliziert werden (in den Formeln für η im Nenner des Bruchs)

$$k_L = 1 + 2,4 \frac{d}{D}$$

b) Versuchsdurchführung

Führen Sie über jeden Schritt Aufzeichnungen. Alle Maße, Messwerte, etc. MÜSSEN notiert werden.

Füllen Sie den Standzylinder mit der zu untersuchenden Flüssigkeit.

Zur Messung der Geschwindigkeit brauchen Sie eine ausreichende Fallstrecke. Dazu bringen Sie mit Isolierband zwei Marken an, wobei sich die obere einige cm unter dem Flüssigkeitsspiegel befinden sollte. Messen Sie den Abstand der Marken (entspricht Δx) mit dem Maßband (Messfehler schätzen).

Die Kugeln befinden sich in Petrischalen (Nummer notieren). Öffnen Sie die Schalen vorsichtig, um keine Kugeln zu verlieren. Verwenden Sie Pinzetten, um mit den Kugeln zu hantieren.

Messen Sie den Durchmesser d der von Ihnen verwendeten Kugeln (10 Stk, Mittelwert + Standardabweichung) und den Durchmesser D des Standzylinders mit der Schublehre. Wie groß ist der Korrekturfaktor k_1 ? Müssen Sie ihn bei der Berechnung von η_{fl} berücksichtigen?

Die Kugeln bestehen entweder aus Glas ($\rho = 2,4 \text{ g/cm}^3$) oder aus Stahl ($\rho = 7,9 \text{ g/cm}^3$).

Die Dichte der Flüssigkeit bestimmen Sie mit den Aräometerspindeln, die nach dem Prinzip des Auftriebs arbeiten. Eine Spindel taucht so weit in die Flüssigkeit ein, bis ihr Gewicht gleich der Auftriebskraft ist. Die Dichte kann dann an der Skala am oberen Ende der Spindel abgelesen werden (Eintauchtiefe). Nach Verwendung Spindeln gründlich mit Wasser (und Spülmittel) abspülen und trocknen.

Die Temperatur der Flüssigkeit wird vor und nach der Zähigkeitsmessung mit dem Digitalthermometer bestimmt.

Führen Sie nun zur eigentlichen Messung der Zähigkeit 10 Fallversuche durch (1 Testversuch am Anfang zählt nicht) und messen Sie die Zeit zwischen dem Passieren der beiden Marken mit der Stoppuhr (Mittelwert + Standardabweichung der Fallzeit t).

Berechnen Sie nun die Fallgeschwindigkeit (und zur Sicherheit die Reynoldszahl) und die Zähigkeit der Flüssigkeit.

Im Protokoll (das spätestens zur nächsten Demo-Übung mitgebracht werden muss) sollten alle Messwerte (einzeln und als Mittelwert mit Standardabweichung) angeführt sein.

Zum Schluss der Messung gießen Sie die Flüssigkeit durch ein Teesieb zurück in die Vorratsbehälter. Die Kugeln reinigen Sie in einer Schale mit Wasser und etwas Spülmittel, sieben sie wieder aus und lassen sie auf einem Blatt Küchenpapier trocknen. Die Standzylinder werden ebenfalls gereinigt (Wasser, Spülmittel, Flaschenbürste) und getrocknet.



$22,0^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{Mittelwert}} = 21,7^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$
 $21,7^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$
 $21,7^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$
 $21,8^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$

$D_{\text{Spindel}} = \text{Ø } 8 \text{ mm} \pm 0,05 \text{ mm}$ $d_{\text{Stahlbohrer}} =$
 $d_{\text{Kunstbohrer}} =$

$K_L = 1 + 2,4 \frac{e}{D}$ $K_L \text{ gem} =$
 $K_L \text{ Stahl} =$

Spindel ~~Ø 8 mm~~ $\pm 0,1 \text{ cm}$
 $(30,5 \pm 0,1) \text{ cm}$

Stoppuhr 1 $\pm \frac{1}{100}$		Stoppuhr 2 $\pm \frac{1}{100}$	
Spalte 2	Spalte 1	Spalte 1	Spalte 2
	07,09 sec	07,05 sec	07,24 sec
	07,03 sec	07,22 sec	
	07,03 sec	07,02 sec	
	07,07 sec	07,04 sec	
		07,15 sec	
		06,65 sec	

Stoppuhr 1

Stoppuhr 2

7,10 sec

06,98 sec

7,06 sec

07,20 sec

7,12 sec

07,07 sec

7,12 sec

7,06 sec

7,23 sec



Potenz Produkt - Fehlerfortpflanzung

$$V = \frac{\Delta X}{A}$$

$$\Delta X = \cancel{0,305} 0,305 \pm 0,0001$$

$$\Delta x^1 \cdot A^{-1}$$

$$\sigma_R \leq \left(1 \cdot \frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x} + 1 \cdot \frac{\sigma_A}{A} \right) \cdot R$$

$$\sigma_R^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 \cdot \sigma_y^2$$

$$R = 2,107 \cdot \left(0,7250 \cdot \sqrt{\frac{0,01452 \cdot 0,01}{(2RT)^2 \cdot (p_H - p_e)} + 0,04534 - \frac{1,679}{R/n}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = 2,107 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0,01452 \cdot 0,01}{(2RT)^2 \cdot (p_H - p_e)} + 0,04534 - \frac{1,679}{R/n} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{0,01452}{(2RT)^2 \cdot (p_H - p_e)}$$

$$+ 2,107 \cdot \left(0,7250 \cdot \sqrt{\frac{0,01452 \cdot 0,01}{(2RT)^2 \cdot (p_H - p_e)} + 0,04534 - \frac{1,679}{R/n}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1,679}{R^2 \cdot n} \right)$$

$$\frac{0,01452 \cdot 0,01}{(2RT)^2 \cdot (p_H - p_e)} \cdot 2,107 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0,01452 \cdot 0,01}{(2RT)^2 \cdot (p_H - p_e)} + 0,04534 - \frac{1,679}{R/n} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Fallgeschwindigkeit

	Messwerte für Glaskugeln		Messwerte für Stahlkugeln	
	Stoppuhr 1	Stoppuhr 2	Stoppuhr 1	Stoppuhr 2
1		7,05	6,35	6,48
2	7,02	7,22	6,37	6,37
3	7,03	7,02	6,27	6,36
4	7,03	7,04	6,4	6,37
5	7,07	7,15	6,28	
6		6,65	6,59	6,57
7		7,24	6,37	6,3
8	7,1	6,98	6,31	6,39
9	7,06	7,2	6,25	6,24
10	7,06	7,23	6,41	6,38
Mittelwert	7,05	7,08	6,36	6,38
Sigma	0,03	0,18	0,10	0,10

OBERFLÄCHENSPIANNUNG

MESSUNG MIT DER RINGMETHODE NACH DU NOÛY

(Ring-Tensiometer)

Im Inneren einer Flüssigkeit erfährt ein Molekül allseitig Anziehungskräfte durch die Nachbarn, die sich gegenseitig aufheben. Ist aber der Abstand z von der Oberfläche kleiner als der Radius r_w der Wirkungssphäre der Molekularkräfte ($r_w \approx 10^{-7}$ cm), so ist die Resultierende R von Null verschieden und um so größer, je kleiner z ist. Um ein Molekül aus dem Flüssigkeitsinneren durch diese Grenzschicht mit der Dicke r_w in die Oberfläche zu verschieben, muss daher Arbeit aufgewendet werden. Ein Molekül in der Oberfläche hat gegenüber einem Molekül im Inneren eine um den Betrag der Arbeit erhöhte potentielle Energie. Zur Vergrößerung der Flüssigkeitsoberfläche müssen Moleküle aus dem Inneren in die Oberfläche gebracht werden.

Die zur Vergrößerung der Flüssigkeitsoberfläche s um Δs erforderliche Arbeit ist $\Delta W = \sigma \cdot \Delta s$

Der Quotient

$$\sigma = \frac{\text{Arbeit zur Bildung neuer Oberfläche}}{\text{Oberflächenzuwachs}}$$

heißt *spezifische Oberflächenenergie*.

Bei Flüssigkeitslamellen ist der Oberflächenzuwachs Δs auf beiden Seiten der Lamelle vorhanden. Er ist doppelt so groß, wie der Zuwachs der Lamellenfläche. Da Arbeit = Kraft · Weg, also $\Delta W = K \cdot \Delta x$ und $\Delta s = 2 (\Delta x \cdot L)$ ist, erhält man für σ :

$$\sigma = \frac{K}{2L} = \frac{\text{Am Rande angreifende Kraft}}{\text{Länge des Randes}}$$

Dieser Ausdruck wird als *Oberflächenspannung* bezeichnet.

Oberflächenspannung und spezifische Oberflächenenergie sind zahlen- und dimensionsmäßig identische (Kraft/Länge = Energie/Fläche).

Eine Flüssigkeitslamelle unterscheidet sich von einer elastischen Membran dadurch, dass die Kraft F von der Verschiebung Δs unabhängig ist.

Die Oberflächenspannung nimmt durchwegs mit wachsender Temperatur ab. Sie ist sehr empfindlich gegen geringfügige Verunreinigungen.

Die Ringmethode nach Lecomte du Noüy:

1919 publizierte Lecomte du Noüy seine Ausarbeitung über ein Ring-Tensiometer. Diese Publikation wurde zur Grundlage des wohl populärsten Verfahrens zur Messung von Ober- und Grenzflächen-spannungen [1]. Ein durch Glühen gereinigter Platin-Iridium-Ring bekannten Umfangs wird in die zur untersuchende Flüssigkeit eingetaucht, bis die Ringoberfläche vollständig benetzt ist. Wird der Ring anschließend in die Flüssigkeitsoberfläche gezogen, ist das dabei gemessene Kräfte maximum direkt proportional zur Oberflächenspannung.

Und zwar:

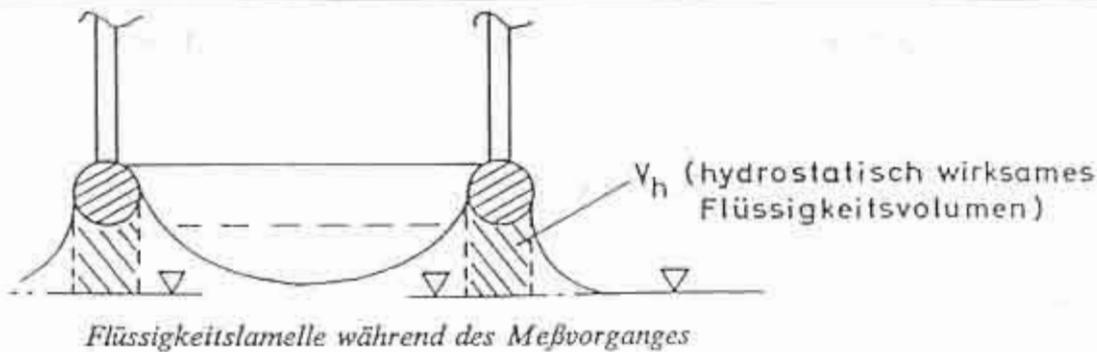
$$\sigma = \sigma^* \cdot F$$

σ ... tatsächlicher Spannungswert

σ^* ... gemessener Spannungswert

F ... Korrekturfaktor

Die bei diesem Messverfahren verwendeten Ringe aus Platin-Iridium-Legierung besitzen einen Umfang von ca. 6 cm. Dies entspricht einer Benetzungslänge, d.h. einer Kontaktlänge zwischen Flüssigkeit und Ringoberfläche, von 12 cm, da die Flüssigkeit sowohl an der Innen- als auch an der Außenseite Kontakt mit dem Ring hat.



Korrektur der Messwerte:

Der Nachteil der Ringmethode liegt in der Notwendigkeit, den Messwert nachträglich korrigieren zu müssen. Neben der Kraft, die durch die Oberflächenspannung auf den Ring wirkt, muss noch das hydrostatisch wirksame Flüssigkeitsvolumen unter dem Ring berücksichtigt werden. Der Korrekturfaktor F ist abhängig von der Ringgeometrie und der Dichte der beteiligten Phasen [2]. Zuidema und Waters [3] haben eine Gleichung zur Ermittlung des Korrekturfaktors bei Oberflächenspannungsmessungen ermittelt:

$$F = 1.07 \times \left(0.7250 + \sqrt{\frac{0.01452\sigma^*}{(2R\pi)^2(\rho_{fl} - \rho_g)} + 0.04534 - \frac{1.679}{R/r}} \right)$$

σ^* ... abgelesener Wert der Oberflächenspannung (in mN/m)

R ... Radius des Ringes (in cm)

r ... Radius des Platindrahtes (in cm)

ρ_{fl} ... Dichte der Flüssigkeit (in g/cm³)

ρ_g ... Dichte der Luft (in g/cm³), kann null gesetzt werden

Der gemessene Wert ist mit dem Korrekturfaktor zu multiplizieren.

Das alte Tensiometer

$$R = 9,92 \text{ mm}$$

$$r = 0,185 \text{ mm}$$

Das neue Tensiometer

$$R = 9,55 \text{ mm}$$

$$r = 0,185 \text{ mm}$$

Flüssigkeitsdichten (T = 20°C)

$$\rho_{\text{Wasser}} = 0,998 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Glycerin}} = 1,260 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Äthanol}} = 0,790 \text{ g/cm}^3$$

Messung der Oberflächenspannung mit dem Tensiometer (Ringmethode):

Der Träger des Tisches wird vorsichtig so weit gehoben, bis der Ring ca. 5 mm in die Flüssigkeit eintaucht. Man läßt die Flüssigkeit zur Ruhe kommen. Durch Linksdrehen der Tischschraube wird der Tisch vorsichtig abgesenkt, bis der Waagenarm aus der Markierung nach unten wandert, d.h. bis der Waagenarm aufgrund der am Ring wirkenden Oberflächenspannung aus der Nulllage ausgelenkt wird. An diesem Punkt beginnt die eigentliche Messung.

Durch Drehen des Handrades im Uhrzeigersinn wird die Torsion des Drahtes erhöht und ein Zug auf den Ring ausgeübt. Dabei wandert der Waagenarm nach oben.

Nun wird der Waagenarm durch Senken des Messgefäßes in die Nullstellung zurückgebracht (Linksdrehung der Tischschraube). Man wiederholt diese abwechselnde vorsichtige Erhöhung des Zuges und das darauffolgende Absenken solange, bis der Film „bricht“, d.h. bis der am Ring angreifende Zug die Oberflächenspannungskräfte völlig überwindet und der Ring aus der Oberfläche nach oben abreißt.

An der Skala wird der Wert der Oberflächenspannung abgelesen [mN/m].

Aufgabe:

Die tatsächlichen Oberflächenspannungen von den drei bereitgestellten Flüssigkeiten sind zu messen. Ein kurzer, übersichtlicher Messbericht ist innerhalb einer Woche beim Vortragenden abzuliefern.

Literatur:

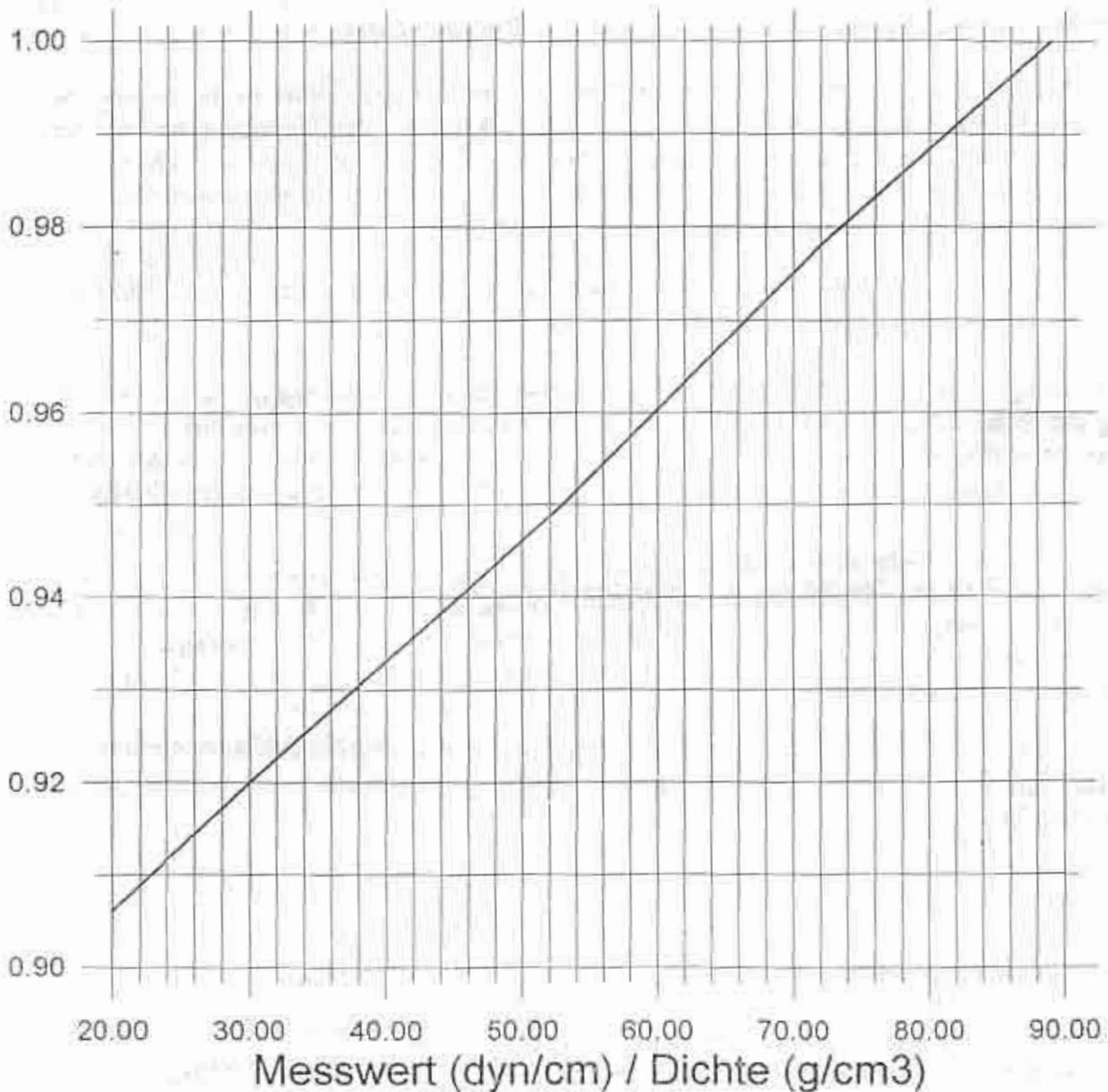
- [1] Lecomte du Noüy (1919)
J.Gen.Physiol. 1: 521
- [2] A Method for the Determination of Surface and Interfacial Tension from the Maximum Pull on a Ring
W. D. Harkins, H. F. Jordan
Journal of Colloid and Interface Science, Vol. 52, May 1930, 1751-1772
- [3] Ring Method for the Determination of Interfacial Tension
H. H. Zidema, G. W. Waters
Industrial and Engineering Chemistry, Vol. 13, May 1941, 312-313

Altes Tensiometer (empirisch)

K für $R/r = 53.8$ und $T = 20^\circ\text{C}$

	Dichte (g/cm^3)	Oberflächensp. (dyn/cm)
Glycerin	1.26	63.4
Äthanol	0.79	22.7
Wasser	1.00	72.5

Korrekturfaktor K



Neues Tensiometer

$\rho_f - \rho_g$	0.65	0.8	1.0	1.2	1.4
σ^* [mN/m]	F_k	F_k	F_k	F_k	F_k
100	1.070	1.049	1.026	1.011	0.998
97	1.065	1.043	1.023	1.008	0.995
94	1.063	1.040	1.020	1.005	0.993
91	1.058	1.037	1.018	1.003	0.991
88	1.054	1.034	1.014	1.000	0.988
85	1.052	1.031	1.012	0.998	0.986
82	1.049	1.029	1.009	0.995	0.984
79	1.043	1.024	1.006	0.991	0.980
76	1.040	1.023	1.003	0.988	0.977
73	1.037	1.018	1.000	0.986	0.974
70	1.033	1.014	0.996	0.982	0.972
67	1.028	1.011	0.993	0.979	0.968
64	1.023	1.006	0.990	0.976	0.964
61	1.019	1.003	0.985	0.973	0.960
58	1.015	0.999	0.982	0.969	0.956
55	1.012	0.996	0.978	0.964	0.953
52	1.007	0.990	0.974	0.959	0.950
50	1.004	0.988	0.972	0.957	0.945
48	1.001	0.985	0.967	0.954	0.943
46	0.998	0.980	0.964	0.951	0.941
44	0.994	0.978	0.960	0.948	0.938
42	0.990	0.975	0.957	0.944	0.935
40	0.987	0.972	0.954	0.941	0.931
38	0.981	0.968	0.951	0.938	0.929
36	0.979	0.963	0.946	0.935	0.923
34	0.975	0.958	0.942	0.931	0.919
32	0.970	0.954	0.940	0.926	0.915
30	0.964	0.950	0.935	0.921	0.911
28	0.959	0.944	0.930	0.916	0.906
26	0.954	0.940	0.924	0.911	0.904
24	0.949	0.935	-	-	-
22	0.942	0.929	-	-	-
20	0.937	0.921	-	-	-
19	0.933	0.918	-	-	-
18	0.930	0.914	-	-	-
17	0.924	0.911	-	-	-
16	0.920	0.906	-	-	-
15	0.915	0.902	-	-	-

Tabelle 1 : Korrekturfaktortabelle für Grenzflächenspannungsmessungen nach der Ringmethode nach HARKINS und JORDAN für verschiedene Dichtedifferenzen bei 20° C.

Ringabmessungen : R = 9.545 mm R/r = 51.6

Strömung von Gasen Der Windkanal

Staudruck

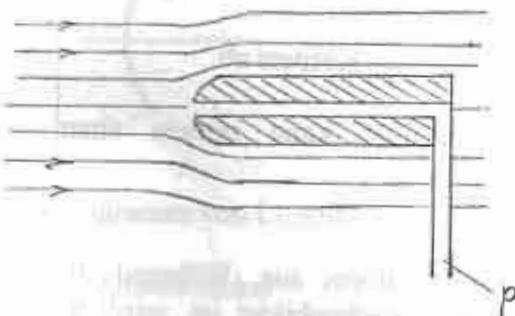
Befindet sich ein Körper in einem strömenden Medium (Gas oder Flüssigkeit), so stellt er ein Hindernis dar, das umströmt wird. Im Anströmbereich bildet sich ein Staugebiet aus. Im Punkt, in dem sich die Strömung teilt („Staupunkt“), wird die Strömungsgeschwindigkeit $v = 0$. Für die Strömungsgeschwindigkeit v_a und den Druck im ungestörten Medium p_a , sowie den Druck im Staupunkt p gilt für den Fall einer stationären Strömung in einem inkompressiblen Medium mit der Dichte ρ die Gleichung von Bernoulli:

$$p_a + \frac{\rho}{2} \cdot v_a^2 = p \quad \text{oder} \quad p - p_a = \frac{\rho}{2} \cdot v_a^2$$

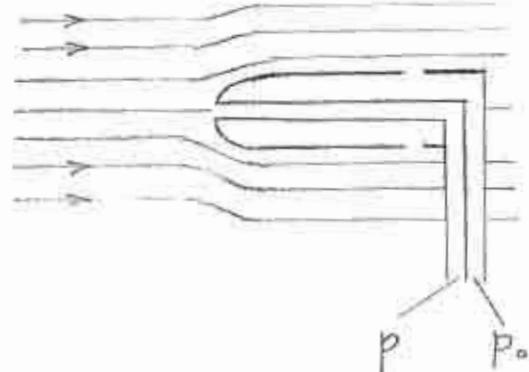
p wird als Gesamtdruck, p_a als statischer Druck und $(p - p_a)$ als hydrodynamischer Druck oder Staudruck bezeichnet.

Die Bernoullische Gleichung ist, soweit Reibung vernachlässigt werden kann, von großer Wichtigkeit für die gesamte Hydrodynamik.

Die Messung von statischem Druck und Staudruck erfolgt mit Hilfe von geeigneten Drucksonden:



Pitot-Rohr zur Messung
des Gesamtdruckes



Prantl-Rohr zur Messung
des Staudruckes

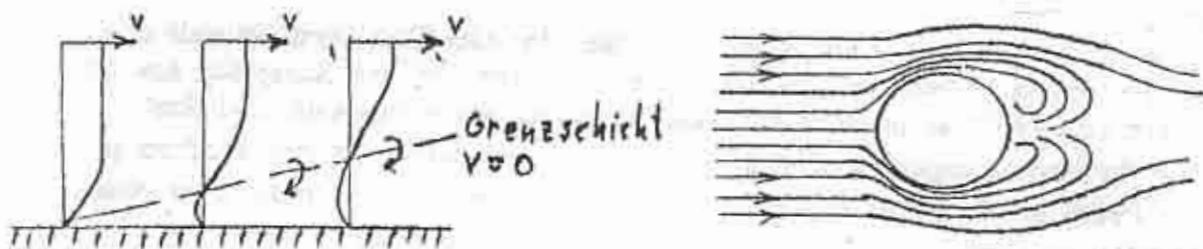
Wirbelbildung an Trennflächen

Treten zwei parallele Strömungen (eines nicht reibungsfreien Mediums) mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in Berührung, so bilden sich im allgemeinen längs der Trennfläche Wirbel aus, die von der Strömung mitgenommen werden. Die beiden Strömungen gleiten wie auf Rollen aneinander entlang. Die Neigung zur Wirbelbildung besteht an allen Unstetigkeitsstellen der Strömung oder ihrer Begrenzung. Ein Beispiel dafür ist die Wirbelbildung hinter normal zur Strömungsrichtung stehenden Platten.

Wirbelbildung an Körperoberflächen

Sowohl an einer Begrenzungsfläche (z.B. Rohrwand) als auch an einer Hindernisoberfläche gilt für die Geschwindigkeit des Mediums $v = 0$. Dies führt z.B. im Fall kleiner Strömungsgeschwindigkeiten zur Ausbildung eines parabolischen Geschwindigkeitsprofils in durchströmten zylindrischen Röhren. Die zwischen den Schichten des Mediums auftretenden Reibungskräfte weisen hauptsächlich in die Fortbewegungsrichtung des Mediums, Querkräfte

sind vernachlässigbar. Bei Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit wird der Geschwindigkeitsgradient immer größer, auftretende Querkräfte führen schließlich zu einer Umkehr der Strömungsrichtung nahe der Grenzschicht und zur Wirbelbildung.



Bei der Umströmung eines Körpers erfolgt also eine Ablösung der äußeren Strömung vom Körper und die Bildung von Wirbeln, wenn die Geschwindigkeit groß genug ist. Die Geometrie des Körpers beeinflusst die Wirbelbildung („Stromlinienform“).

Kräfte auf Körper in Strömungen

Auf eine in eine Parallelströmung eingebrachte Kugel wirkt bei idealem (reibungsfreiem) Medium keinerlei Kraft. In einem realen Medium wird durch die auftretenden Druckdifferenzen und Reibungsspannungen auf einen in der Strömung befindlichen Körper, dessen Schwerpunktsgeschwindigkeit ungleich der Strömungsgeschwindigkeit des Mediums ist, eine Kraft ausgeübt. Dabei spielt die Wirbelbildung eine entscheidende Rolle. Die wirkende Kraft ist proportional zur angeströmten Fläche F und zum Staudruck:

$$K = c \cdot F \cdot \frac{\rho v^2}{2}$$

Der dimensionslose Beiwert c hängt nur von der speziellen Gestalt des Körpers ab.

Die Messung der auf angeströmte Körper wirkenden Kräfte kann mittels einer Komponentenwaage erfolgen.

Der Tragflügel

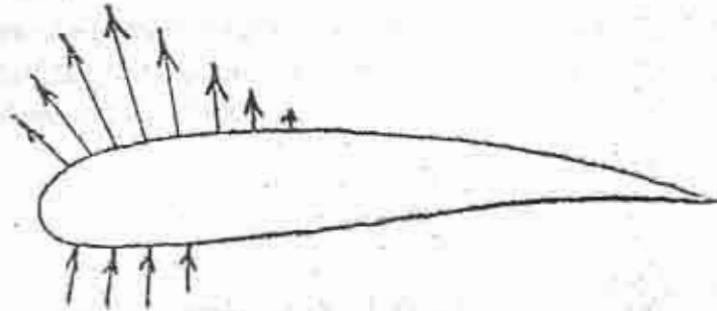
Ein Tragflügel zeichnet sich durch seine spezielle Stromlinienform aus. Während die Oberseite in etwa einer idealen Stromlinienform (Tropfenform) nachgebildet ist, wird die Unterseite zumeist gerade verlaufend, manchmal auch mit einer leicht konkaven Krümmung ausgeführt. Aufgrund der Asymmetrie herrscht an der Unterseite des Tragflügels höherer Druck (niedrigere Geschwindigkeiten der Strömung), dagegen an der oberen Fläche kleinerer Druck (höhere Strömungsgeschwindigkeiten). Am Flügelende kann es bei höheren Geschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Anstellwinkel der Tragfläche zu einer Wirbelbildung kommen. Diese Wirbelbildung entzieht Energie und bewirkt somit einen Widerstand. Durch die Form bedingt, entsteht um den Tragflügel eine Zirkulationsströmung (hervorgerufen durch die Geschwindigkeitsdifferenz), die der Parallelströmung überlagert ist.

Die an einem umströmten Tragflügel auftretende Druckdifferenz resultiert in einer Kraft (Auftrieb). Wenn diese Kraft größer ist als die Schwerkraft (Gewicht des Flugkörpers) und dieser entgegengerichtet, kann sich die Konstruktion vom Boden erheben. Dies kann man durch geeignete Wahl der Flügelfläche und Geschwindigkeit erreichen. Bei einer Vergrößerung des Anstellwinkels wird die Asymmetrie und damit die wirkende Kraft verstärkt, es steigt aber auch der Strömungswiderstand. Es gibt einen optimalen Gleitwinkel bei dem das Verhältnis von Auftriebs- (c_A) zu Widerstandsbeiwert (c_w) ein Maximum annimmt (Polardiagramm von Lilienthal).

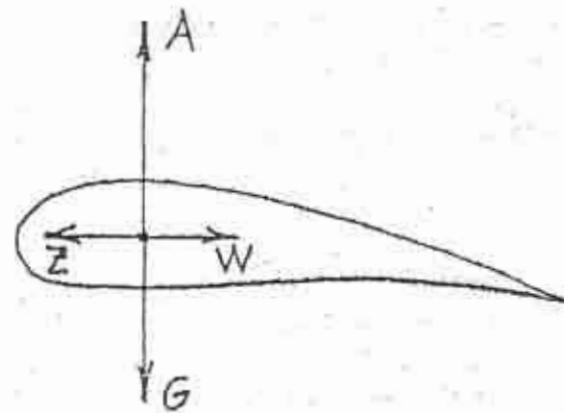
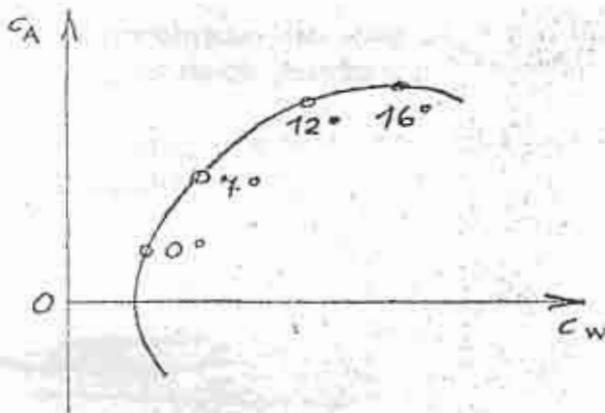
Das Verhältnis

$$\frac{W}{A} = \frac{c_w}{c_A} = \varepsilon$$

wird als Gleitzahl bezeichnet.



Druckverteilung am Tragflügel



Polardiagramm von Lilienthal

Grade...Anstellwinkel

c_A ...Auftriebsbeiwert

c_w ...Widerstandsbeiwert

A...Auftriebskraft

G...Gewicht

Z...Zugkraft

W...Widerstandskraft

Experimente:

- 1) Die Druckdifferenzen werden mit einem Manometer gegenüber Atmosphärendruck gemessen. Dazu befinden sich in einem Tragflügel kleine Löcher, die mit der Seite des Flügels in Verbindung stehen; von dort erfolgt der Anschluß zum Manometer.
- 2) Die Messung der Auftriebs- und Widerstandskräfte erfolgt mittels einer Komponentenwaage.

Bei beiden Messungen können die Anstellwinkel derart verändert werden, dass daraus alle wichtigen Daten bestimmt werden können.

Literatur:

Bergmann-Schaefer, Bd.1, (1975),

Prantl, Strömungslehre

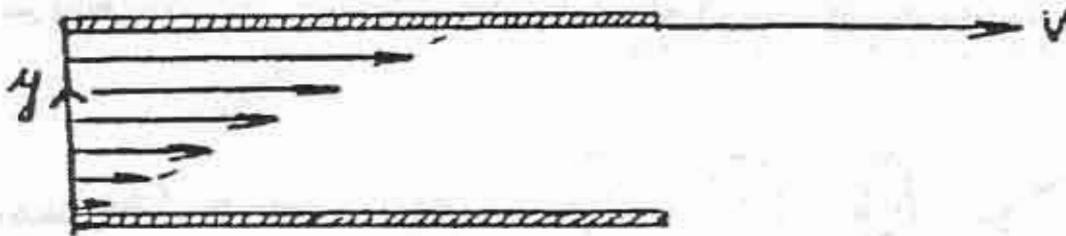
Strömung von Flüssigkeiten Der Pohl'sche Trog

Zur Charakterisierung der Strömung von Flüssigkeiten werden Bahnlinien und Stromlinien verwendet. Die Bahnlinie erhält man, indem man die Bewegung eines einzelnen Flüssigkeitsteilchens verfolgt (z.B. durch eine photographische Aufnahme eines in der Strömung mitgeführten Teilchens bei langer Belichtungszeit). Eine Bahnlinie macht also die Geschichte, d.h. das zeitliche Hintereinander eines Teilchens sichtbar. Information über die momentanen Strömungsverhältnisse erlangt man durch Stromlinien, Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt die Richtungen der Vektoren der momentanen Strömungsgeschwindigkeiten haben (Aufnahme eines Teilchens bei kurzer Belichtungszeit). Im Fall einer stationären Strömung, deren Bestimmungsgrößen (Druck, Geschwindigkeit, Dichte u.s.w.) nur vom Ort, nicht aber von der Zeit abhängen, sind Bahn- und Stromlinien identisch.

Läßt man Wasser zwischen zwei parallelen Glasplatten hindurchfließen, können durch Einbringen von Tinte die Stromlinien (= Bahnlinien) dieser Bewegung sichtbar gemacht werden.

Laminare Strömung

Bei der Betrachtung realer Flüssigkeiten kann auf die innere Reibung zwischen einzelnen Flüssigkeitsteilchen nicht verzichtet werden. Man betrachte zwei Platten, zwischen denen sich eine Flüssigkeit befindet, und von denen eine ruht, während sich die andere mit der Geschwindigkeit V in tangentialer Richtung bewege.



Die unmittelbar an die Platten grenzenden Flüssigkeitsschichten bewegen sich infolge der Reibung mit der gleichen Geschwindigkeit wie die jeweilige Platte ($v = 0$ bzw. $v = V$).

Dazwischen übt jede bewegte Flüssigkeitsschicht auf die folgende durch die innere Reibung eine Tangentialkraft aus. Von der unteren zur oberen Platte wächst die Geschwindigkeit v der

einzelnen Schichten proportional dem Geschwindigkeitsgradienten $\frac{dv}{dy}$. Für die

Tangentialkraft F gilt daher:

$$F = A \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dy}$$

Für die Schubspannung τ also die auf die Fläche wirkende Kraft F/A folgt:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{dv}{dy}$$

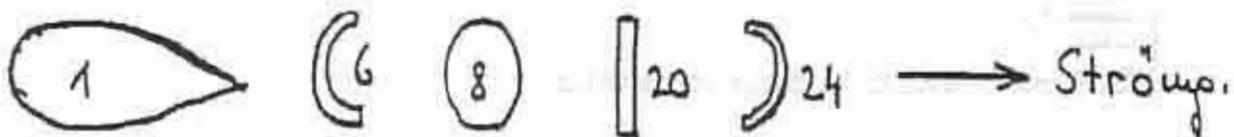
η ist eine Materialkonstante und wird als Zähigkeit bezeichnet. In großer Entfernung von umströmten Körpern und/oder die Strömung begrenzenden Oberflächen (z.B. Rohrwände), also innerhalb des strömenden Mediums, ist der Geschwindigkeitsgradient i.A. sehr klein, daher kann auf die Betrachtung der Schubspannung innerhalb dieser Medien weitgehend verzichtet werden. Nicht vernachlässigbar ist sie jedoch in der Grenzschicht an einem umströmten Körper bzw. an begrenzenden Oberflächen. Ein relatives Maß für die Bedeutung der inneren Reibung auf das Verhalten des strömenden Mediums (z.B. Umschlag laminare/turbulente Strömung) gibt die Reynoldszahl Re . Sie stellt das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften dar:

$$Re = \frac{r \cdot \rho \cdot v}{\eta}$$

Ideal reibungsfreie Strömung

Die Strömung in einem Medium mit vernachlässigbarer Zähigkeit ist in jedem Fall stationär. Für ein reales Medium (η und ρ konstant) können r und v derart gewählt werden, dass Trägheitskräfte gegenüber Reibungskräften vernachlässigbar sind (d.h. Re klein). In diesem Fall ist die Strömung ebenfalls stationär, die Stromlinienbilder gleichen jenen einer ideal reibungsfreien Strömung. Zum Studium des Einflusses von umströmten Körpern auf den Verlauf der Stromlinien in einem reibungsfreien Medium kann daher ein reales Medium (z.B. Wasser) gewählt werden, vorausgesetzt die auftretenden Reynoldszahlen werden durch geeignete Wahl der Versuchsbedingungen (Strömungsgeschwindigkeit, physische Dimension der Probekörper) klein gehalten.

Die Bewegungsgleichung eines Flüssigkeitselements bei ideal reibungsloser Strömung liefert als integrale Lösung die Bernoulli-Gleichung, mit deren Hilfe des Strömungsbilder um eingetauchte Körper beschrieben werden können.



- Sie liefert also Staupunkt, Geschwindigkeitszunahme bei Querschnittsverengungen (verbunden mit Stromlinienverdichtung) und Druckänderungen.
- Nicht beschreibbar durch die Bernoulligleichung sind Widerstand, Auftrieb, Grenzschicht und deren Ablösung; auch eine befriedigende Wirbeltheorie kann aus ihr nicht gefunden werden.

Das Gesetz von Stokes

Bei realen Medien kann der Strömungswiderstand, den ein im Medium bewegter Körper erfährt, zur experimentellen Bestimmung von η benutzt werden. Als Beispiel sei hier das Gesetz von Stokes angeführt, das (als exakte Lösung der Stokes-Navier'schen Differential-Gleichungen) die Reibungskraft beschreibt, die durch eine zähe Flüssigkeit auf eine Kugel mit Radius r mit konstanter Geschwindigkeit ausgeübt wird.

$$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

Literatur:

PRANTL; Strömungslehre

BERGMANN-SCHAEFER; Bd. I

Experimenteller Aufbau (Abb. 1):

Ein von einem Elektromotor (EM) über eine Nocke (N) bewegter Erreger (E) taucht periodisch in die Wasseroberfläche ein und ruft auf ihr Oberflächenwellen hervor. Diese werden mittels einer "direkten Schattenschlierenmethode" sichtbar gemacht: Das von der Punktlichtquelle (LQ) ausgehende und von dem auf dem Wannenboden liegenden Spiegel (SP) reflektierte Licht wird beim Durchgang durch die Flüssigkeit an den Störungen der Flüssigkeitsoberfläche so gebrochen, daß es in einigen Winkelbereichen des Kegels des reflektierten Lichts zu einer Erhöhung, in anderen zu einer Verminderung der Helligkeit kommt. Diese Zonen unterschiedlicher Lichtintensität erscheinen auf dem Projektionschirm als "Bild" des Wellenfeldes auf der Flüssigkeitsoberfläche. Intermittierende Beleuchtung in der Frequenz der Wellenerregung mittels der rotierenden Stroboskopscheibe (ST) verbessert die Erkennbarkeit der zu beobachtenden Erscheinungen.

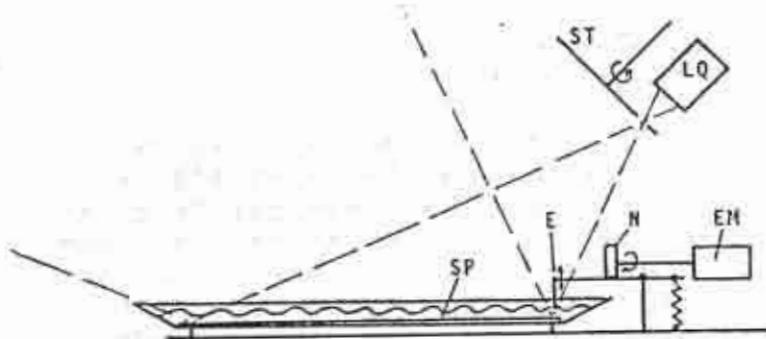


Abb. 1: Wellenwanne mit Wellenerreger und Beleuchtungseinrichtung.

Aus der Vielzahl der mittels der Wellenwanne darstellbaren Erscheinungen der Wellenlehre (Beugung, Interferenz, Reflexion, Brechung, Doppler-Effekt, Dispersion) seien im folgenden einige herausgegriffen:

Das Huyghens-Fresnelsche Prinzip:

Nach dem Huyghens-Fresnelschen Prinzip ist jedes Element eines Wellenzuges Ausgangspunkt einer (im isotropen Raum kugelförmigen) Elementarwelle. Aus der Überlagerung der Elementarwellen ergibt sich die neue Wellenfront.

Die Ausbildung einer ebenen Welle durch Überlagerung einer großen Zahl gleichphasig angeregter elementarer Kreiswellen, deren Zentren auf einer Geraden liegen, zeigt ein Experiment, in dem unter sonst gleichbleibenden Versuchsbedingungen ein einfacher Taststift (Quelle einer einzigen Kreiswelle) gegen Mehrfacherreger mit steigender Stiftzahl ausgetauscht wird.

Interferenz zweier Kreiswellen:

Zwei identische Punktquellen "emittieren" Kreiswellen gleicher Amplitude und Wellenlänge. Im Schlierenbild sind die durch Interferenz zustande gekommenen Zonen niedriger und hoher Summenamplitude zu erkennen, die bei gleichphasiger Wellenerregung symmetrisch zu den beiden Quellpunkten liegen. Einführung einer kontinuierlich veränderlichen Phasendifferenz zwischen den beiden Erregern hat ein Wandern des Interferenzbildes zur Folge.

Brechung:

Die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwellen hängt nach Gleichung (1) unter anderem von der Wellenlänge λ und vom Verhältnis der Wellenlänge zur Flüssigkeitstiefe H ab:

$$c_p = \{(g \cdot \lambda / 2\pi) \cdot \operatorname{tgh}(2\pi H / \lambda) + 2\pi\sigma / \lambda\rho\}^{1/2} \quad \text{Gleichung (1)}$$

(λ = Wellenlänge, σ = Oberflächenspannung, g = Schwerebeschleunigung, H = Flüssigkeitstiefe, ρ = Dichte der Flüssigkeit.)

Abb. 2 zeigt die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwellen als Funktion der Erregerfrequenz (Wasser, 20°C, ——— $H \gg \lambda$, — — — $H = 2 \text{ mm}$).

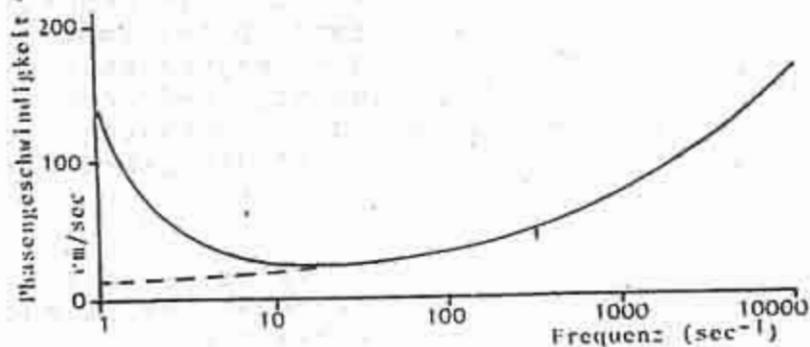


Abb. 2; Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von Oberflächenwellen.

Die Abhängigkeit von c_p von der Flüssigkeitstiefe erlaubt es, das aus der geometrischen Optik bekannte Phänomen der Brechung als Erscheinung der Wellenlehre sichtbar zu machen: Legt man zum Beispiel in die Wellenwanne eine Bikonvexlinse aus Flachglas, so daß sich über ihr die Wassertiefe auf wenige mm verringert, so ist deutlich zu sehen, daß die vom Erreger kommenden ebenen Wellenfronten durch die unterschiedliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit innerhalb und außerhalb des Linsenbereichs zu Kreiswellen deformiert werden, die in einem Punkt, dem Brennpunkt, zusammenlaufen.

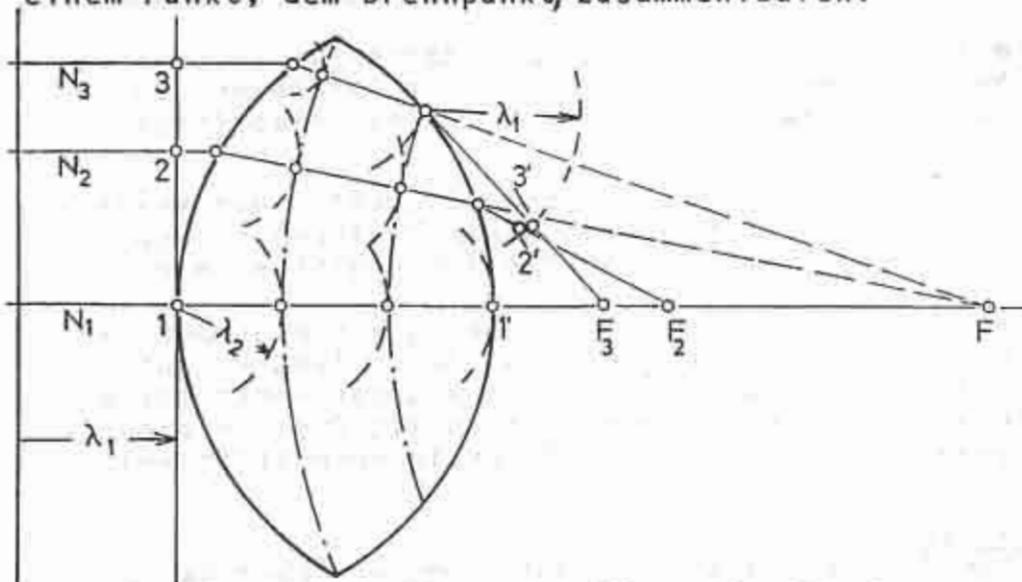


Abb. 3: Elementarwellendarstellung der Brechung am Beispiel einer Bikonvexlinse ($c_1/c_2 = \lambda_1/\lambda_2 = n = 1.5$). Die Wellenfronten (— und — — —) stellen die Einhüllenden unendlich vieler Elementarwellen dar, von denen einige eingezeichnet sind (— — —). Die Linse zeigt zufolge ihrer starken Krümmung "sphärische Aberration", d.h. Zonen verschiedenen Achsenabstands weisen verschiedene "Brennweiten" auf. Punkte gleicher Phase ($1', 2'$ und $3'$) liegen auf der Bildseite der Linse nicht auf einem Kreis, wie dies für den aberrationsfreien Fall gilt.

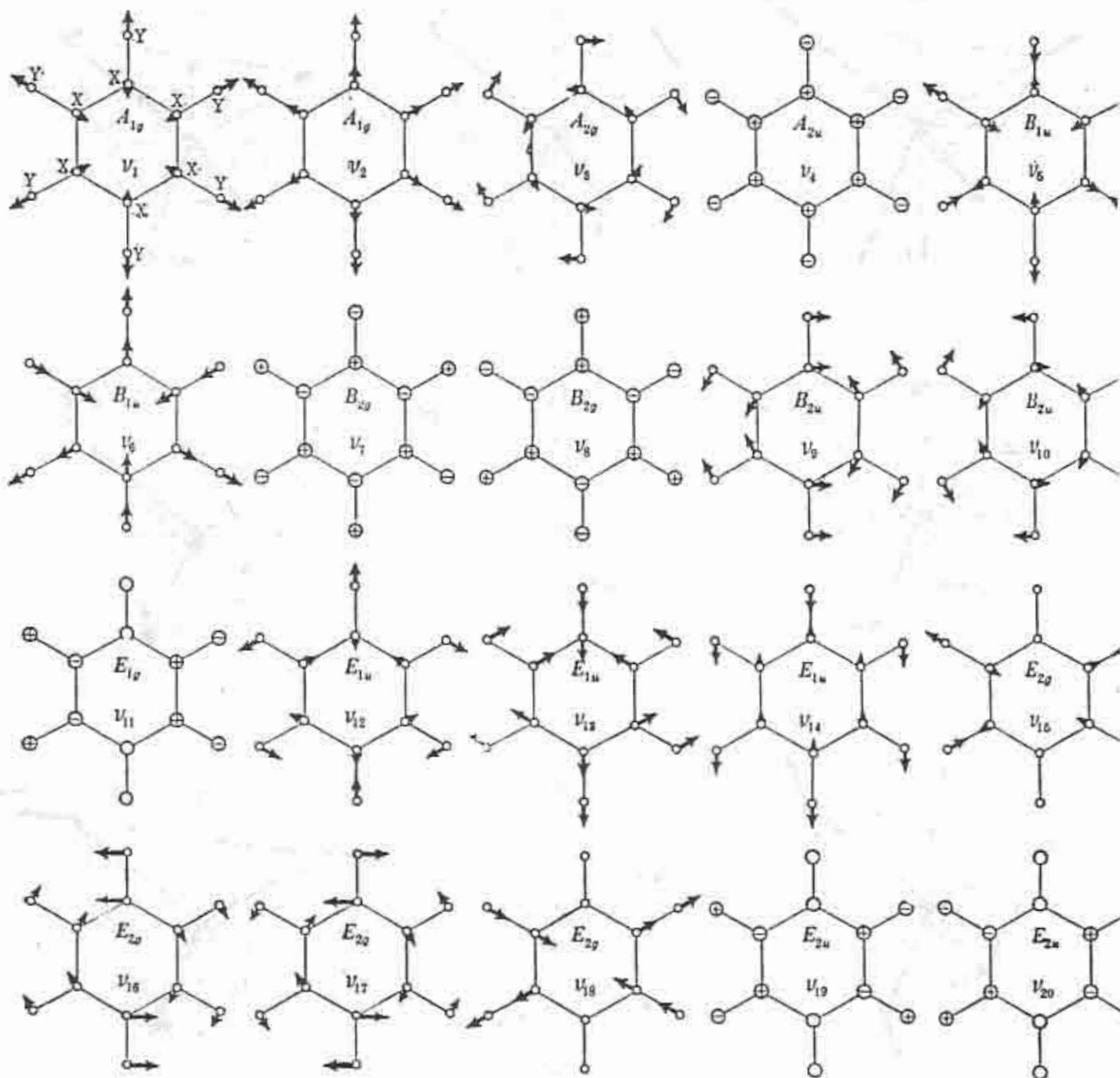


FIG. 50. Normal vibrations of an X_6Y_6 molecule (point group D_{6h}).—Only one component of each degenerate vibration is given. For the other components compare Fig. 40 and 38c.

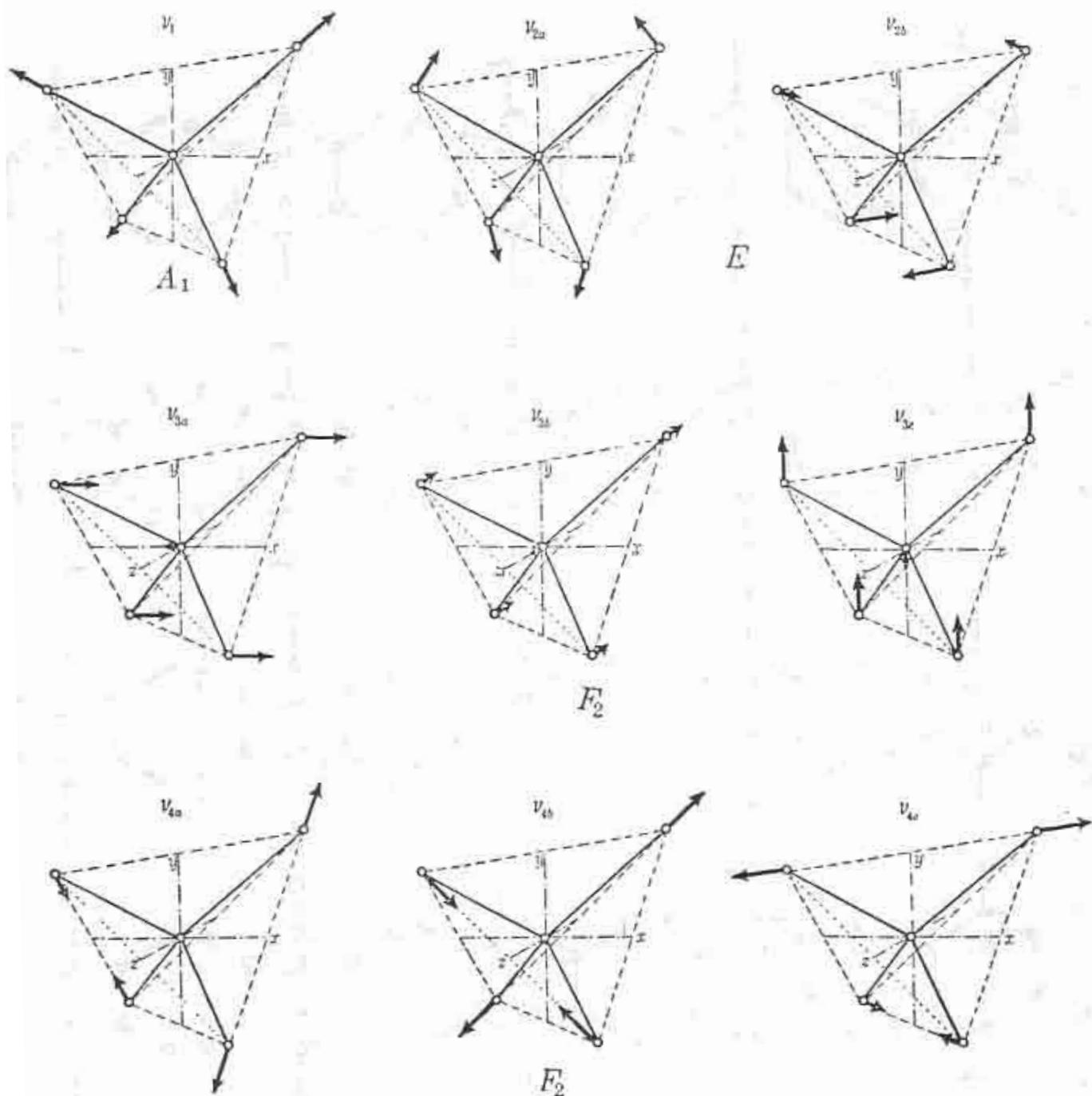


FIG. 41. Normal vibrations of a tetrahedral XY_4 molecule.—The three two-fold axes (dot-dash lines) are chosen as x , y , and z axes.

Eigenschwingungen

Ein elastisches Medium, das gewissen Beschränkungen (Randbedingungen) unterworfen ist, befindet sich im Gleichgewicht. Wird dieses Gleichgewicht durch äußere Kräfte gestört, dann entstehen im allgemeinen stationäre Schwingungszustände (Eigenschwingungen, stehende Wellen), die von den Randbedingungen abhängig sind. Für die dabei auftretenden Auslenkungen $u(\vec{x}, t)$ der Teilchen des elastischen Mediums aus ihren Gleichgewichtslagen liefert die Elastizitätstheorie die Wellengleichung

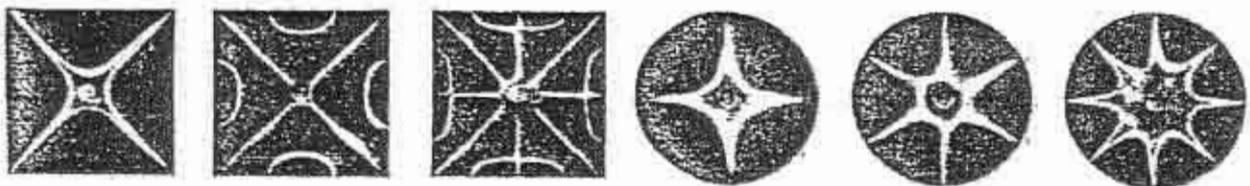
$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0$$

Löst man die Wellengleichung unter Berücksichtigung der vorgegebenen Randbedingungen, dann erhält man die Eigenschwingungen.

Auf folgende Spezialfälle sei nun näher eingegangen:

A) Die Chladnischen Klangfiguren als Beispiel für Schwingungen von Platten und Membranen.

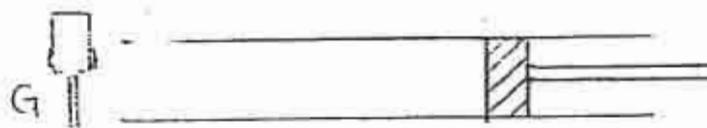
Wird eine in der Mitte fest eingespannte Platte mit feinem Sand bestreut und am Rand mit einem Bogen gestrichen, so häuft sich der Sand in den Knotenlinien an. Die Art der Schwingung ist von den Randbedingungen abhängig (durch Festhalten der Platten erzwungene Knotenlinien). Für kreisförmige Platten existieren exakte Rechnungen, für quadratische Platten dagegen nur Näherungsmethoden.



B) Kundtsche Staubfiguren

In einem Glasrohr mit verschiebbarem Stempel sei etwas Lycopodiumpulver verteilt. Regt man die Luftsäule mit einer Galtonpfeife am offenen Ende zu Schwingungen an, so bildet sich eine stehende Welle aus, deren Existenz durch das an den Schwingungsknoten in Ruhe befindliche Lycopodiumpulver nachgewiesen werden kann. Da auf beiden Seiten eines Schwingungsknotens einer stehenden Longitudinalwelle die Gasmoleküle mit einer Phasendifferenz von π schwingen, sind die Schwingungsknoten die Stellen größter Druckänderung (Druckbäuche!), während die Druckknoten den Schwingungsbäuchen entsprechen. Die Distanz zweier benachbarter Anhäufungsstellen des Lycopodiumpulvers im

Kundtschen Rohr ergibt $\frac{\lambda}{2}$. Daraus lässt sich, die Frequenz ν sei bekannt, über $c = \lambda \nu$ die Schallgeschwindigkeit bestimmen.



C) Helmholtzscher Resonator

Dieser besteht aus einer metallische Hohlkugel mit zwei Öffnungen. Über die große Öffnung wird der Helmholtz-Resonator durch einen Lautsprecher (von einem Tongenerator angesteuert) zu Eigenschwingungen angeregt. Im Resonanzfall verstärkt der Resonator erheblich die hörbare Schallintensität und zugleich dringt aus der kleinen Öffnung ein Luftstrom, der mit einer Kerze nachgewiesen werden kann.

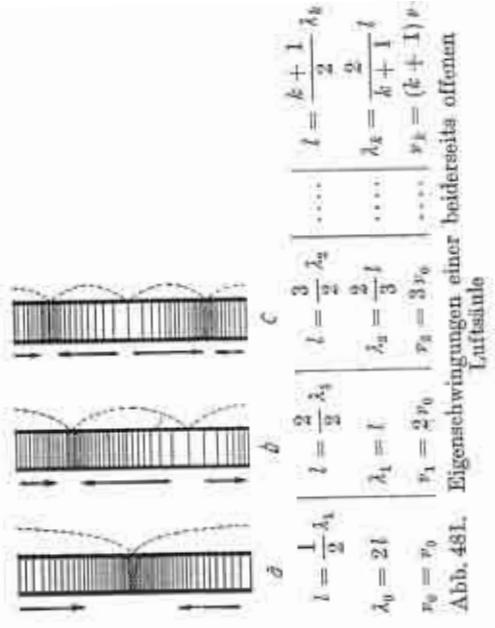
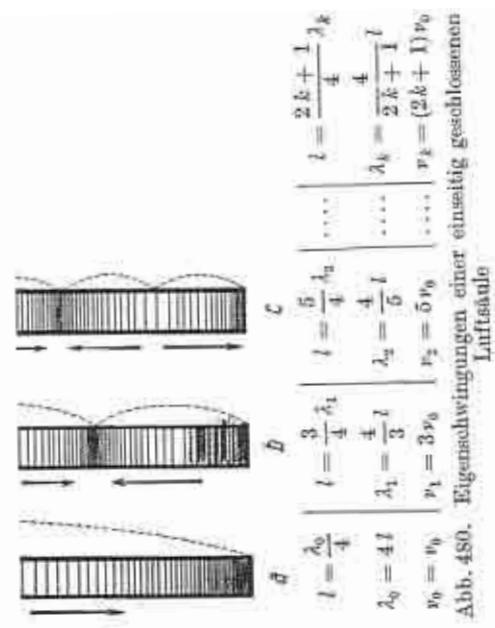


Eigenschwingung	Schwingungsform	Eigenschwingung	Eigenschwingungszahl
Grundschiwingung		λ_0	ν_0
1. Oberschiwingung		$\lambda_1 = \frac{1}{2} \lambda_0$	$2 \nu_0$
2. Oberschiwingung		$\lambda_2 = \frac{1}{3} \lambda_0$	$3 \nu_0$
3. Oberschiwingung		$\lambda_3 = \frac{1}{4} \lambda_0$	$4 \nu_0$
4. Oberschiwingung		$\lambda_4 = \frac{1}{5} \lambda_0$	$5 \nu_0$
...
k. Oberschiwingung	$\lambda_k = \frac{1}{k+1} \lambda_0$	$(k+1) \nu_0$

Abb. 472. Transversale Eigenschwingungen einer Saite

Eigenschwingung	Schwingungsform	Wellenlänge der Schwingung	Eigenfrequenz
Grundschiwingung		λ_0	ν_0
1. Oberschiwingung		$\lambda_1 = \frac{1}{2} \lambda_0$	$2 \nu_0$
2. Oberschiwingung		$\lambda_2 = \frac{1}{3} \lambda_0$	$3 \nu_0$
3. Oberschiwingung		$\lambda_3 = \frac{1}{4} \lambda_0$	$4 \nu_0$
4. Oberschiwingung	$\lambda_k = \frac{1}{k+1} \lambda_0$	$(k+1) \nu_0$

Abb. 477. Longitudinale Eigenschwingungen eines an beiden Enden freien Stabes



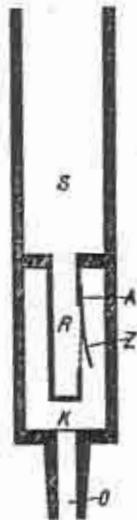


Abb. 483. Längsschnitt durch eine Zungenpfeife

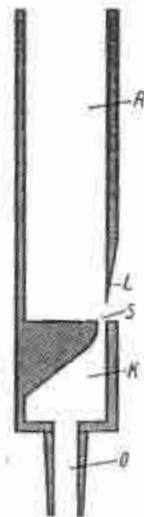


Abb. 486. Längsschnitt durch eine Lippenpfeife

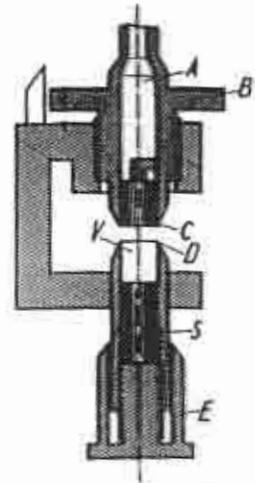


Abb. 487. Längsschnitt durch eine Galtonpfeife

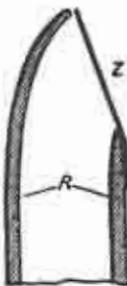


Abb. 484. Mundstück der Klarinette

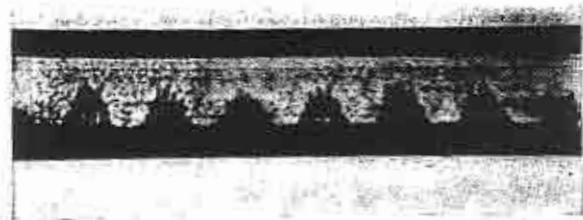


Abb. 488. Mit der Galtonpfeife bei einer Frequenz von 21440 Hz erzeugte Kundtsche Staubfiguren (Vergrößerung etwa 1,3fach)

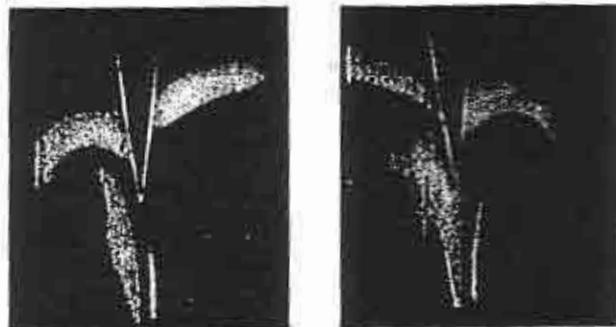


Abb. 485. Schlierenbilder der Wirbelablösung an einer angeblasenen Schneide (nach Krüger und Caspar); der dunkle Strich in der von unten nach oben verlaufenden Gaslamelle ist durch Lichtbrechung in ihr verursacht und beim Betrachten des Bildes wegzudenken

EXPERIMENT: GASTHERMOMETER

Bestimmung des Spannungskoeffizienten eines Gases

Bei Temperaturänderungen ändern sich Druck und Volumen eines Gases. Basierend auf den Gasgesetzen kann man die Druckänderung der Gase zur Temperaturmessung benutzen. Dazu verwendet man Gasthermometer, deren einfachste Form das Jolly'sche Gasthermometer ist. Bei diesem Gasthermometer wird das Gay-Lussac'sche Gesetz (Gl. 1) ausgenutzt, um eine Temperaturmessung auf eine Druckmessung zurückzuführen:

$$p_t = p_o(1 + \alpha t)$$

(Gl. 1)

p_t	Druck des Gases bei der Temperatur t
p_o	Druck des Gases bei der Temperatur $t = 0^\circ\text{C}$
α	Isochorer ($V = \text{const}$) Spannungskoeffizient (Raumausdehnungskoeffizient) der Gase [K^{-1}]

Das in Fig. 1 abgebildete Gasthermometer besteht aus dem Rezipienten A, welcher über eine Kapillare B mit einem Quecksilber-Manometer C - mit einem fixierten Schenkel (FS) links und einem beweglichen Schenkel (BS) rechts - verbunden ist.

Im FS befindet sich ein gläserner Dorn D, dessen Spitze als Referenzmarke (h_{ref}) für den linken Quecksilbermeniskus dient. Abgelesen wird an einer Spiegelskala h und h_{ref} , daraus wird jeweils die Differenz Δh

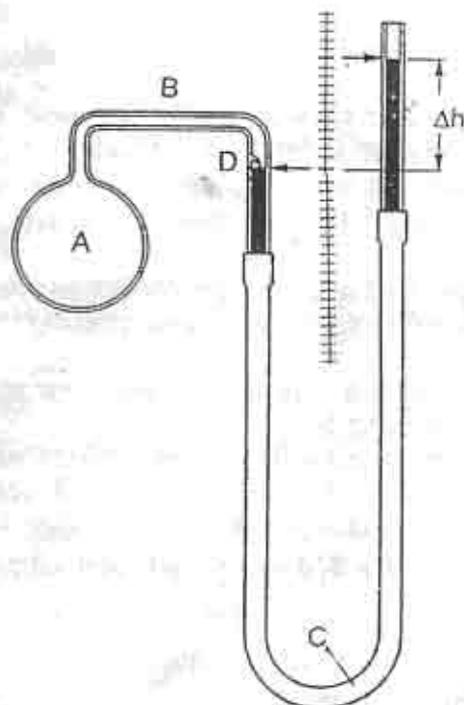


Fig.1. A - Rezipient, B - Kapillare, C - Hg-Manometer, D - Glasdorn

Wir wollen den Spannungskoeffizienten α bestimmen. Hierzu tauchen wir A zunächst in ein Eisbad, dann in ein Wasserbad mit der Temperatur t . Dabei heben wir beide Male BS so hoch, daß das Quecksilber in FS den Dorn D berührt und bestimmen $h(0)$ und $h(t)$. **Schließlich senken wir BS so weit, daß beim Abkühlen von A kein Quecksilber nach A überströmt.** Aus den $h(0)$ und $h(t)$ entsprechenden Differenzen Δh_0 und Δh_t und dem äußeren Luftdruck b ergeben sich die Drucke p_0 und p_t in A zu

$$p_0 = b + \Delta h_0 \quad \text{und} \quad p_t = b + \Delta h_t$$

Zwischen den Drucken besteht nach Gl. 1 die Beziehung

$$p_t = p_0(1 + \alpha t)$$

oder

$$\alpha = \frac{p_t - p_0}{p_0} \frac{1}{t}$$

(Gl. 2)

Dabei ist t die Temperatur des Wasserbades.

Die obige Überlegung setzt voraus, daß sich das gesamte Luftvolumen auf gleicher Temperatur befindet. Dies ist nicht der Fall, da die in den Kapillaren B und im FS oberhalb der Dornspitze befindliche Luft immer Zimmertemperatur hat. Dieses Volumen wird manchmal als „schädliches Volumen“ (v_s) eines Gasthermometers bezeichnet. Bei genauerer Messung wären auch Korrekturen für die Ausdehnung des Rezipienten zu berücksichtigen.

Gang des Versuchs und Auswertung:

1. Der Rezipient hat zunächst Raumtemperatur t_z . Man hebt und senkt den beweglichen Schenkel (BS) so lange, bis der Meniskus im fixierten Schenkel (FS) gerade den Dorn berührt; dann lese man die Höhendifferenz $\Delta h_z = h_z - h_{ref}$ der beiden Menisken ab.
2. Bringen Sie den Rezipienten ins Eisbad und mißt erneut die Höhendifferenz Δh_0 wie in Pkt. 1 beschrieben.
3. Bringen Sie den Rezipienten in das Wasserbad und messen die Höhendifferenz Δh_t .
4. Senken Sie den freien Schenkel (BS) wieder auf die Ausgangsstellung und entfernen erst dann das Wasserbad.
5. Lesen Sie den äußeren Luftdruck b auf einem Quecksilberbarometer ab, und berechnen Sie die Drucke p_z, p_0, p_t aus $h(z), h(0), h(t)$ und b .
6. Schätzen Sie das relative schädliche Volumen v_s/V (V = Volumen des Rezipienten) ab.
7. Berechnen Sie α nach Gl. 2.
8. Bestimmen Sie dann die Raumtemperatur z.B. aus p_z, p_0 .
9. Versuchen Sie zu begründen warum $\alpha = (1 / 273,15) K^{-1}$ ist, und vergleichen Sie diese Größe mit Ihrem Meßwert.

Lit.

Bergmann-Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd.1, de Gruyter, p.583 (1974).

BESTIMMUNG VON WÄRMEKAPAZITÄTEN MIT DEM ERWÄRMUNGSKALORIMETER

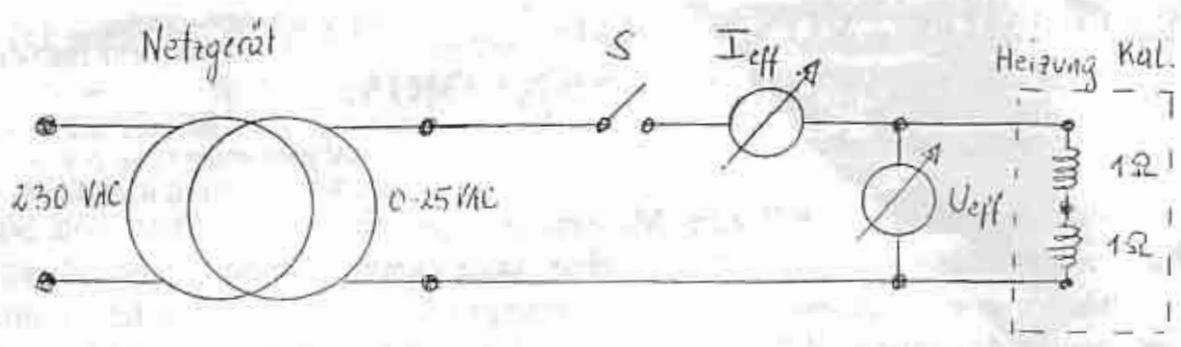
Das Kalorimeter ist ein Gerät zum Messen der spezifischen Wärmen von Stoffen sowie von Reaktionsenthalpien, die bei phys. oder chem. Veränderungen abgegeben oder aufgenommen werden. Beim Erwärmungskalorimeter wird eine bestimmte Wärmemenge ΔQ einem Wärmeempfänger (Flüssigkeit oder Festkörper in einem Flüssigkeitsbad) zugeführt, der dadurch eine Temperaturänderung ΔT erfährt. Die Umgebungstemperatur soll dabei konstant, der Wärmekontakt zur Umgebung möglichst gering sein. Realisiert wird ein solches Gerät durch ein thermisch sehr gut isoliertes Gefäß (Dewar), in dem durch Heizspiralen der Füllsubstanz eine meßbare Wärme (z. B. Ohm'sche Wärme) zugeführt werden kann, und ein Thermometer zur Bestimmung der Temperatur der zu untersuchenden Substanz.

Zu verwendende Geräte:

- a) Netzgerät 0 - 25 VAC, 10A (Wechselspannung)
- b) Voltmeter (Analog Multimeter, Unigor, Meßbereich 10V~)
- c) Amperemeter (Digitalmultimeter, Meßbereich 10A~)
- d) Schalter
- e) Stoppuhr
- f) Waage (Briefwaage 1 - 1000g)
- g) Dewar mit Heizspiralen (2 x 1 Ohm) und Rührwerk
- h) Becherglas 250 ml
- i) Probekörper

Nützliche Hinweise und Angaben zur Versuchsdurchführung:

- 1) Aufbau der Geräte (siehe Schaltplan) und Voreinstellung des Netzgerätes: Das Voltmeter wird direkt parallel zu den beiden in Serie geschalteten Heizspiralen geschaltet, das Amperemeter in Serie zu dem einpoligen Schalter. Bei leerem Dewar und geschlossenem Schalter wird die Spannung am Netzgerät solange erhöht, bis der Strom 3A erreicht hat (dies sollte bei einer Spannung von ca. 6V der Fall sein). Dann wird der Schalter (unter Beibehaltung der Einstellung am Netzgerät) geöffnet.



- 2) Vorbereitung des Dewars am Beginn jedes Aufheizversuches:
Der Dewar soll zwecks raschem Temperaturengleich vor jedem Experiment für einige Minuten unter laufendem Wasser gespült, anschließend vollständig entleert und getrocknet (Küchenrolle) werden.
- 3) Einwaage der Wassermengen: Die gewünschte Wassermenge wird zunächst in ein Becherglas gefüllt, das gefüllte Becherglas auf der Briefwaage abgewogen. Nachdem das Wasser in den Dewar gefüllt wurde, ist die Masse des leeren Glases (mit ev. Wasserresten) durch erneute Wägung zu bestimmen.
- 4) Temperaturmessung: Es ist darauf zu achten, daß sich bei der Bestimmung der Anfangstemperatur der Dewar samt Inhalt im thermodynamischen Gleichgewicht befinden (Beobachtung des Thermometers über einige Minuten). Beim Heizvorgang (ca. 10 min) ist der Temperaturverlauf zu protokollieren (Ablesung des Thermometers in Abständen von ca. 30s). Nach dem Ende des Heizvorganges ist die Temperatur solange weiter zu messen und zu protokollieren, bis keine (positive) Veränderung mehr zu beobachten ist. Solange eine Temperaturmessung stattfindet ist das Rührwerk in regelmäßigen Abständen zu betätigen (etwa alle 15s).
- 5) Montage der Probekörper: Nach Bestimmung der Masse der Probekörper auf der Briefwaage sind diese auf dem gereinigten und getrockneten Oberteil des Erwärmungskalorimeters zu montieren. Dazu ist zunächst das Thermometer und alle elektrischen Anschlüsse am Deckel des Kalorimeters zu entfernen. Die Probekörper sind so geformt, daß sie in das Rührwerk eingehängt werden können. Es ist zu beachten, daß bei der Montage die beiden Heizspiralen nicht verbogen werden. Es ist vor Befüllen des Kalorimeters mit Wasser sicherzustellen, daß sich das Rührwerk samt Probekörper frei bewegen läßt und dabei die Heizspiralen nicht berührt (Kurzschluß!!).

A) **BESTIMMUNG der SPEZIFISCHEN WÄRMEKAPAZITÄT c_0 von WASSER und der WÄRMEKAPAZITÄT W des ERWÄRMUNGS-KALORIMETERS:**

Zwei unterschiedliche Wassermassen m_1 und m_2 werden mit zwei Wärmemengen ΔQ_1 und ΔQ_2 elektrisch aufgeheizt. Die Temperaturen dieser Wassermassen steigen dabei um ΔT_1 und ΔT_2 , das Kalorimeter (Dewar+Heizung+Rührwerk+Thermometer) hat die Wärmekapazität W .

Es gilt:

$$\Delta Q_1 = m_1 \cdot c_0 \cdot \Delta T_1 + W \cdot \Delta T_1$$

$$\Delta Q_2 = m_2 \cdot c_0 \cdot \Delta T_2 + W \cdot \Delta T_2$$

Daraus folgt für c_0 durch einfache Umformung:

$$c_0 = \frac{1}{m_2 - m_1} \cdot \left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta T_2} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta T_1} \right)$$

und für W :

$$W = \frac{1}{m_2 - m_1} \cdot \left(m_2 \cdot \frac{\Delta Q_1}{\Delta T_1} - m_1 \cdot \frac{\Delta Q_2}{\Delta T_2} \right)$$

Bei der Durchführung der Messungen ist sicherzustellen, daß am Beginn alle Komponenten (Erwärmungskalorimeter und Wasser) dieselbe Temperatur (etwa Spülwassertemperatur) haben (siehe Hinweise). Die Wassermassen sollen für m_1 bei 100 g und für m_2 bei 200g liegen.

Eine ausführliche Fehlerrechnung ist durchzuführen.

B) BESTIMMUNG der SPEZIFISCHEN WÄRMEKAPAZITÄT von verschiedenen MATERIALIEN:

Unter Benutzung der im Teil A ermittelten Daten (Literaturwert $c_0 = 4187 \text{ J/(kg K)}$ und W) ist mit dem Erwärmungskalorimeter für mindestens 2 verschiedene Materialien die spezifische Wärmekapazität c_x zu ermitteln.

Dazu werden zunächst das Erwärmungskalorimeter und der Probekörper durch Spülen auf gleiche Temperatur gebracht und anschließend getrocknet. Nach Montage des abgewogenen Probekörpers (Masse m_1) im Erwärmungskalorimeter wird eine definierte Masse Wasser (etwa Spülwassertemperatur) m_2 hinzugefügt. Es ist dabei zu beachten, daß der Probekörper vollständig mit Wasser bedeckt ist ($m_2 > 150 \text{ g}$).

Bei Zuführung einer bestimmten Wärmemenge ΔQ erwärmt sich das System Wasser+Probekörper um ΔT . Aus der Relation:

$$\Delta Q = m_1 \cdot c_x \cdot \Delta T + m_2 \cdot c_0 \cdot \Delta T + W \cdot \Delta T$$

läßt sich sofort die Größe c_x ermitteln:

$$c_x = \frac{1}{m_1} \cdot \left[\frac{\Delta Q}{\Delta T} - (m_2 \cdot c_0 + W) \right]$$

Eine ausführliche Fehlerabschätzung ist durchzuführen.

$$M_{\text{Leit}} = 99,72 \text{ g}$$

$$M_{\text{voll}} = 987,96 \text{ g}$$

$$M_{\text{Anode}} = 99,68 \text{ g}$$

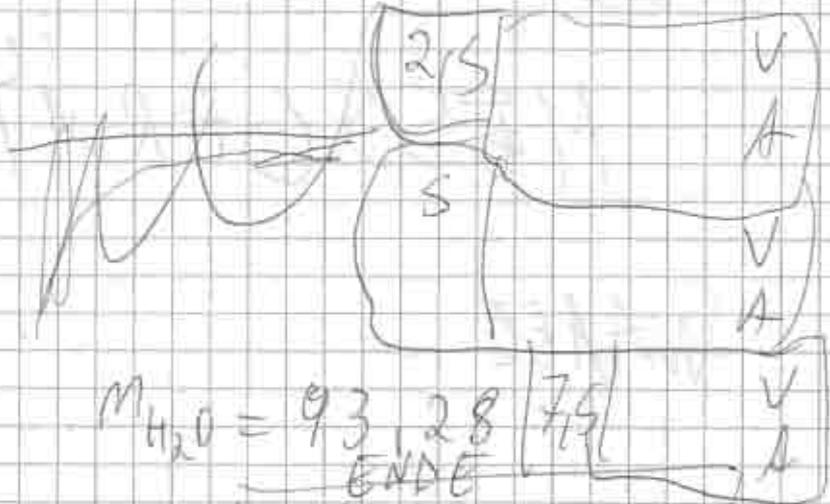
KANG
 ANI
 $\sim 6,66$
 $\sim 3,13$

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 93,28 \text{ g}$$

7,5
 ENDE

$$\sim 6,77 \text{ V}$$

$$\sim 3,19 \text{ A}$$



t [min]	Temp [°C]	I [mA]	Temp [°C]
0	24,0	5,5	36,8
0,5	24,4	6	38,0
1	25,4	6,5	39,4
1,5	27,0	7	40,6
2	28,2	7,5	41,6
2,5	29,4	8	42,6
3	29,8	8,5	43,8
3,5	32,0	9	44,8
4	33,0	9,5	46,0
4,5	34,5	10	47,0
5	35,4	stabil	47,4

MESSGERÄTE

WAGE



$94,57 \mu = M_{leak 1}$

$184,30 \mu = M_{VOLL 1}$

$94,83 \mu = M_{leak 2}$

$204,06 \mu = M_{VOLL 2}$

$94,87 \mu = M_{leak 3}$

Stabile Temp: $36,8^\circ C$

ANFAANG	ENDE
6,68 V	6,76 V
3,10 A	3,13 A

$\Delta M_1 = 89,47 \mu$
 $2,5 \frac{\mu}{A}$ $6,67 V$
 $3,11 A$

$\Delta M_2 = 109,19 \mu$
 $5 \frac{\mu}{A}$ $6,73 V$
 $3,10 A$

$M_{PRÜF} = 198,66 \mu$
 $7,5 \frac{\mu}{A}$ $6,77 V$
 $3,12 A$

A [mA]	Temp ($^\circ C$)	A [mA]	Temp ($^\circ C$)
0	24,8	5	30,8
0,5	25,0	5,5	31,6
1	25,8	6	32,2
1,5	26,4	6,5	32,8
2	27,0	7	33,4
2,5	27,6	7,5	34,0
3	28,2	8	34,8
3,5	29,0	8,5	35,4
4	29,6	9	36,0
4,5	30,2	9,5	36,2
		10	36,6

Hauptfer 147,83 g
 Messing 137,06 g
 Alu 42,30 g

Masse 150

m Kug 94,94 g

m roll 1 205,69 g

~~m roll 1~~
~~m roll 1~~ m roll 1 94,90 g

$$\Delta m_1 = 110,79$$

m roll 2 146,00 g

m roll 2 99,80 g

$$\Delta m_2 = 51,10$$

$$M_{\text{roll}} = 167,89$$

U _{out} / A	Temp	A	Temp
0	24,4	5,5	32,0 32,4
0,5	25,0	6	33,2
1	25,8	6,5	34,0
1,5	26,6	7	34,8
2	27,2	7,5	35,6
2,5	28,0	8	36,2
3	28,6	8,5	36,8
3,5	29,4	9	37,4
4	30,2	9,5	38,0
4,5	30,6	10	38,8
5	31,8	Maximal	38,8

	2,5	5	7,5	
Strom	6,30 V	6,77 V	6,77 V	6,8 N
	3,1 A	3,1 A	3,05 A	3,09 A
ENDE	6,8			
	3,1			

$$m_{\text{KOH}} = 99,56 \text{ g}$$

$$m_{\text{KOH}_2} = 198,88 \text{ g}$$

$$m_{\text{KOH}_1} = 99,77 \text{ g}$$

$$m_{\text{KOH}_2} = 198,99 \text{ g}$$

$$m_{\text{KOH}_2} = 99,61 \text{ g}$$

Franklin

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = 156,39 \text{ g}$$

ANNA	6,94	U
	3,2	A
2,5	6,84	V
	3,15	A
0,5	6,94	V
	3,2	A
7,5	6,8	V
	3,2	A
ENDE	6,8	V
	3,2	A

A	Temp
0	24,4
0,5	24,6
1	25,4
1,5	26,2
2	27,2
2,5	27,8
3	28,6
3,5	29,4
4	30,2
4,5	31,0

A	Temp
5	31,6
5,5	32,4
6	33,4
6,5	34,2
7	35,0
7,5	35,8
8	36,6
8,5	37,4
9	38,0
9,5	38,8
10	39,6
Ende	40,2

$\rho = 747,5 \text{ mmHg}$

Vacuum

$h_0 = -88 \text{ mmHg}$

H_2O

$0,0^\circ\text{C}$

$h = +196 \text{ mmHg}$

$58,9^\circ\text{C}$

-47 mmHg

$0,1^\circ\text{C}$

-67 mmHg

$47,1^\circ\text{C}$

-49 mmHg

$0,1^\circ\text{C}$

87 mmHg

$59,3^\circ\text{C}$

-46 mmHg

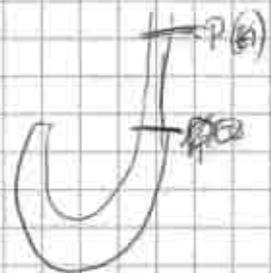
$0,1^\circ\text{C}$

126 mmHg

$70,1^\circ\text{C}$

$+13 \text{ mmHg}$

Pressure $20,2^\circ\text{C}$



$$\alpha = \frac{P_A - P_0}{P_0} \cdot \frac{1}{A}$$

$$\frac{4}{3} \cdot 2,8^3 \pi = V_K \approx 32,8401 \text{ cm}^3$$

$$P_0 = \frac{b}{A} + \Delta h_0$$

$$V_s = \underbrace{4 \cdot 0,5^2 \cdot 0,10 \pi}_{7,5 + 30\pi} + \frac{0,55^2 \pi \cdot 5,5}{3} \approx 3,0146 \text{ cm}^3$$

$$P_A = b + \Delta h_A$$

$$A = \frac{P_A - P_0}{P_0} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

747,5

48, 42, 49 70

$$P_0 = 700$$

- 475

$$P_A = 760,5$$

13

~~23,6090~~
23,6090

(275,15)

280,7095

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P_0} = \frac{1}{\alpha} \frac{P_0 - P_A + P_0}{P_0^2} = \frac{P_A}{\alpha P_0^2}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial A} = \frac{P_A - P_0}{P_0 \alpha^2}$$

Die BROWN'sche Bewegung.

1828 veröffentlichte der englische Botaniker R. BROWN seine Beobachtungen über die Bewegung von aus Pflanzenpollen und Mineralien gewonnenen und in Flüssigkeiten suspendierten Partikeln. Er hielt diese Zitterbewegung für eine "Vorstufe der allgemeinen Lebensbewegung". C. WIENER wies 1863 darauf hin, daß die Ursache des beobachteten Phänomens "die inneren, den Flüssigkeitszuständen eigentümlichen Bewegungen" seien. EINSTEIN und SMOLUCHOWSKY entwickelten schließlich 1905/06 die heute noch gültige Theorie der BROWN'schen Bewegung. Mißt man für ein in einem Medium suspendiertes Teilchen in N aufeinanderfolgenden Zeitintervallen der Länge Δt die "Verschiebung" x , die das Teilchen in Δt erfährt, so besteht zwischen dem "mittleren Verschiebungsquadrat" $\langle x^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (\sum x^2) / N$ und Δt der in Gleichung 1 gegebene Zusammenhang.

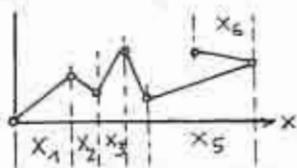


Abb. 1

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{3\pi\eta a} \Delta t \quad (1)$$

(k = Boltzmann-Konstante, T = Temperatur in $^{\circ}K$, η = Zähigkeit des Mediums, a = Radius des Teilchens.)

Die Ableitung von Gleichung 1 erfolgt in drei Schritten:

1) Die Diffusionsbewegung der in einem Medium suspendierten Teilchen folgt den FICK'schen Gesetzen: ⁺

$$j_D = D \cdot (-\partial n / \partial x) \quad (2) \quad \text{und} \quad \partial n / \partial t = D \cdot \partial^2 n / \partial x^2 \quad (3)$$

j_D = Teilchenstrom, D = Diffusionskoeffizient

Eine Lösung der Gleichung 3 lautet: $n(x,t) = N_0 \cdot (4\pi Dt)^{-1/2} \cdot \exp(-x^2/4Dt)$ (4)

Sie ist in Abbildung 2 für verschiedene Zeiten graphisch dargestellt, die Fläche unter jeder der drei Kurven entspricht der Gesamtteilchenzahl N_0 . Aus Gleichung 4 läßt sich nun das mittlere Verschiebungsquadrat errechnen, unter der Annahme, man könne das Mittel über sehr viele Verschiebungen eines Einzelteilchens durch das Mittel über jeweils eine Verschiebung sehr vieler Teilchen ersetzen:

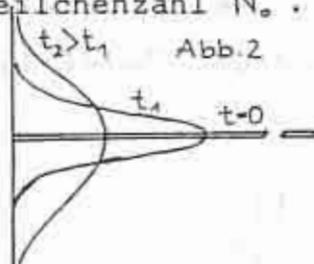


Abb. 2

ersetzen:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2 n(x, \Delta t) dx}{\int n dx} = 2 D \Delta t \quad (5)$$

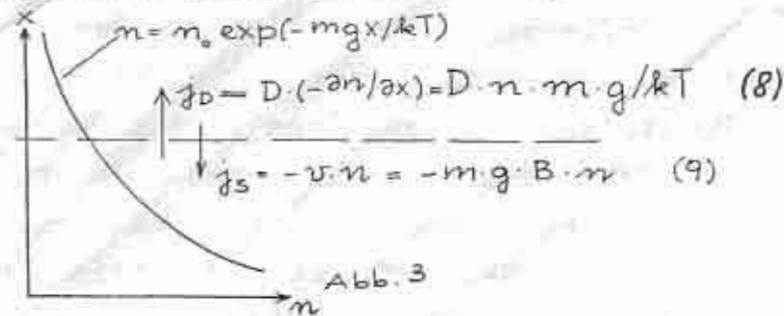
2) Untersuchungen von PERRIN ergaben die Gültigkeit der BOLTZMANN-Verteilung auch für in einem Medium suspendierte Teilchen:

$$n(x) = n_0 \cdot \exp(-m_g x / kT) \quad (6)$$

(m_g = Gewicht des Teilchens, unter Berücksichtigung des Auftriebs, $m_g \cdot x$ = dessen potentielle Energie.)

+) (Beobachtung der Bewegung nur in einer Koordinatenrichtung (x))

Zur Erhaltung der Verteilung ist es notwendig, daß in jeder Höhe x der Sedimentationsstrom im Schwerfeld (j_s) und der ihm entgegengesetzte Diffusionsstrom (j_D) einander jederzeit aufheben: $j_s + j_D = 0$ (7).



Aus den Gleichungen 7, 8 und 9 folgt:

$$D = B \cdot k \cdot T \quad (10)$$

($B = v/K =$ "Beweglichkeit" des Teilchens, d.h. dessen Gleichgewichtsgeschwindigkeit unter der Wirkung der Krafteinheit.)

3) Nach dem STOKES'schen Gesetz gilt zwischen der Gleichgewichtsgeschwindigkeit v eines Teilchens und der Reibungskraft K die Beziehung: $K = 6\pi\eta\alpha v$ (11).

Daraus folgt die Beweglichkeit $B = v/K = 1/6\pi\eta\alpha$ (12).

Die Gleichungen 5, 10 und 12 ergeben zusammen die eingangs angeführte Beziehung (1) zwischen $\langle x^2 \rangle$ und Δt .

Die Beobachtung der BROWN'schen Bewegung erlaubt eine präzise Berechnung der BOLTZMANN-Konstante k und der LOSCHMIDT-Zahl $N_L = R/k$ aus den experimentell bestimmten Verschiebungsquadraten. Sind die Teilchen in einem Gas suspendiert, so ist dabei zu beachten, daß sich die Gaszähigkeit scheinbar verkleinert, sobald der Teilchenradius α in die Größe der mittleren freien Weglänge der Gasmoleküle kommt. Diese Korrektur beträgt für ein Teilchen mit $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-6}$ m in Stickstoff bei 20°C und Normaldruck etwa 20% ($\lambda \approx 0,1 \cdot 10^{-6}$ m).

Moderne Meßmethoden erlauben es, die Diffusionsbewegung sehr vieler suspendierter Teilchen (Hydrosole, Makromoleküle, Bakterien) gleichzeitig zu verfolgen, eine Technik, die u.a. in der Physik der Flüssigkeiten (Verhalten am kritischen Punkt) und der Chemie (Verfolgung von Polymerisationsvorgängen) angewandt wird.

- Literatur: 1) R. Brown: Pogg. Ann. 14, 294 (1828)
 2) C. Wiener: Pogg. Ann. 118, 79 (1863)
 3) R. Becker: "Theorie der Wärme", 258 ff.

- 3. 11. - Messung
- 10. 11. - Trägheit
- 17. 11. - Schallgeschwindigkeit
- ! 24. 11. - Oberflächenspannung (Gruppe 2)
- ! 1. 12. - Viskosität
- 9. 12. - Strömungswiderstände (ab 1965)
- 15. 12. - Schwingungen / Wellen
- ! 12. 1. - } Experimente
- ! 19. 1. - }
- 26. 1. - Molekulare Statistika