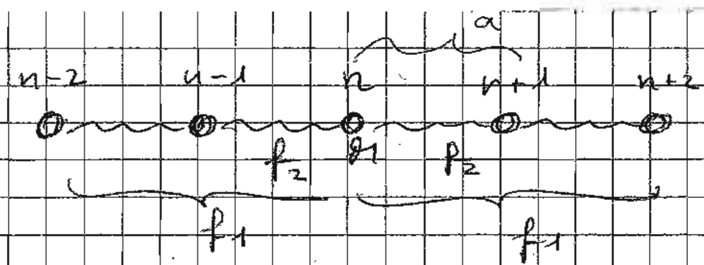
12)



$f_2 \ll f_1$

Bewegl. Gl. f. u_s : „Equazione del moto"

$$M\ddot{u}_n + \phi\begin{pmatrix} n & n-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix} u_{n-1} + \phi\begin{pmatrix} n & n \\ 1 & 1\end{pmatrix} u_n +$$

$$+\phi\begin{pmatrix} n & n+1 \\ 1 & 1\end{pmatrix} u_{n+1} + \phi\begin{pmatrix} n & n-2 \\ 1 & 1\end{pmatrix} u_{n-2} + \phi\begin{pmatrix} n & n+2 \\ 1 & 1\end{pmatrix} u_{n+2} = 0$$

$$\phi\begin{pmatrix} n & n-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} n & n+1 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = -f_2 \quad \Leftarrow \underline{\text{Skript } 9.2}$$

$$\phi\begin{pmatrix} n & n-2 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} n & n+2 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = -f_1$$

$$\phi\begin{pmatrix} n & n \\ 1 & 1\end{pmatrix} = 2f_2 + 2f_1$$

$$\rightarrow M\ddot{u}_n - f_2 u_{n-1} + 2f_2 u_n + 2f_1 u_n - f_2 u_{n+1} - f_1 u_{n-2} - f_1 u_{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow u_{s+n} = u_0 \cdot e^{i(nqa-\omega t)} \quad \rightarrow \ddot{u}_n = -u_0 \cdot \omega^2 e^{i(nqa-\omega t)}$$

$$M\ddot{u}_n + f_2 \cdot (-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}) + f_1 \cdot (2u_n - u_{n-2} - u_{n+2}) = 0$$

$$M\ddot{u}_n + f_2 u_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \left(-e^{i(n-1)qa} + 2 \cdot e^{inqa} - e^{i(n+1)qa}\right) +$$
$$+ f_1 u_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \left(2 e^{inqa} - e^{i(n-2)qa} - e^{i(n+2)qa}\right) = 0$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ -M\omega^2 \cdot u_0 \cdot e^{inqa - i\omega t}}}{M\ddot{u}_n} + f_2 \underbrace{u_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{inqa}}\, 2(\cos(qa) - 1) + f_1 u_0 e^{-i\omega t} \cdot e^{inqa}\, 2(\cos(2qa) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{M\omega^2}{2} + f_2 (\cos(qa) - 1) + f_1 (\cos(2qa) - 1) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\left[f_2 (1 - \cos(qa)) + f_1 (1 - \cos(2qa))\right] 2}{M}$$

$$\omega^2 = \frac{4}{M} \cdot \left[f_2 \left(\sin \frac{qa}{2}\right)^2 + f_1 (\sin qa)^2 \right] \qquad \boxed{2(1-\cos x) = 4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$\alpha_1 = qa$
$\alpha_2 = 2qa$

$$\omega(q) = 2 \cdot \sqrt{\frac{f_2 \left(\sin \frac{qa}{2}\right)^2 + f_1 (\sin qa)^2}{M}}$$

$\Rightarrow$ ~~$f_2 \gg f_1$~~ ! $\quad f_1 \gg f_2$

$$\omega(q) \overset{\sim}{=} 2 \cdot \sqrt{\frac{f_2 \left(\sin \frac{qa}{2}\right)^2}{g_1}} = 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{qa}{2}\right)\right| \cdot \sqrt{\frac{f_2}{g_1}}$$

↳ Dispersionsrelation f. akustische Phononen

„dispersione di fononi acustici"

12) anna — o

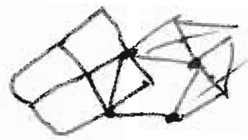
Ashcroft Mermin

m-nächster Nachbar

$$U = \sum_n \sum_{m>0} \frac{1}{2} K_m \left(u(na) - u([n+m]a)\right)^2$$

$$\boxed{\text{Gly:=} \ \omega = 2 \cdot \sqrt{\sum_{m>0} K_m \frac{\sin^2(\frac{1}{2} m k a)}{M}}}$$

13) $m \frac{du}{dt^2} = \vec{F} = (\vec{e}(\vec{e}\, u_e))$



$\hat{\vec{R}} = \frac{\vec{R}}{R}$

nächst. Nachbar eigentl. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ entfernt
übernächste $\quad 1$ entf.

$\hat{R}_\mu \hat{R}_\nu = (\hat{\vec{R}}\hat{\vec{R}})_{\mu\nu}$

$\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{D = \sum_R \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\vec{k}\cdot\vec{R}\right)\left(A\mathbb{1} + B\hat{\vec{R}}\hat{\vec{R}}\right)}$$

$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{M}}$ $\quad \lambda$ .. Ew von D-Matrix

Ursprung $\vec{R} = 0$

12 nächste Nachbarn $\frac{a}{2}(\pm\hat{X} \pm \hat{Y})$ ①

$\frac{a}{2}(\pm Y \pm Z)$ ②

$\frac{a}{2}(\pm Z \pm X)$ ③

$$\boxed{D - \lambda\mathbb{1} = 0}$$ Ew-Gleichung

$$\sum \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\vec{k}\vec{R}\right)\left(A\mathbb{1} + B\hat{R}\hat{R}\right) - \lambda\mathbb{1} = 0$$

$$\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\, a\underbrace{(\pm\hat{X}\pm\hat{Y})\begin{pmatrix}k\\0\\0\end{pmatrix}}_{\pm k}\right)\left(A\mathbb{1} + B(\pm X \pm Y)(\pm X \pm Y)\tfrac{1}{2}\right) +$$

$$\ldots \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\, a\underbrace{(\pm Y \pm Z)\begin{pmatrix}k\\0\\0\end{pmatrix}}_{0}\right)\left(A\mathbb{1} + B(\pm Y \pm Z)(\pm Y \pm Z)\tfrac{1}{2}\right) +$$

Normierung

$$\ldots \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\, a\underbrace{(\pm Z \pm X)\begin{pmatrix}k\\0\\0\end{pmatrix}}_{\pm k}\right)\left(A\mathbb{1} + B(\pm Z \pm X)(\pm Z \pm X)\tfrac{1}{2}\right) - \lambda\mathbb{1} = 0$$

→ fällt bei k weg weil $\sin^2$ symm. ist

$$\sin^2\left(\tfrac{1}{4}ak\right)\left(8A\mathbb{1} + B\tfrac{1}{2}(\text{Summe über alle 8 Matrizen})\right) - \lambda\mathbb{1} = 0$$

$$① \begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\\0\end{pmatrix}(\pm1\ \pm1\ 0) = \begin{pmatrix}\pm1 & \pm1 & 0\\ \pm1 & \pm1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\pm1\\0\\\pm1\end{pmatrix}(\pm1\ 0\ \pm1) = \begin{pmatrix}\pm1 & 0 & \pm1\\ 0 & 0 & 0\\ \pm1 & 0 & \pm1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$ → Longitudinale Lsg. → Transversale Lsg.

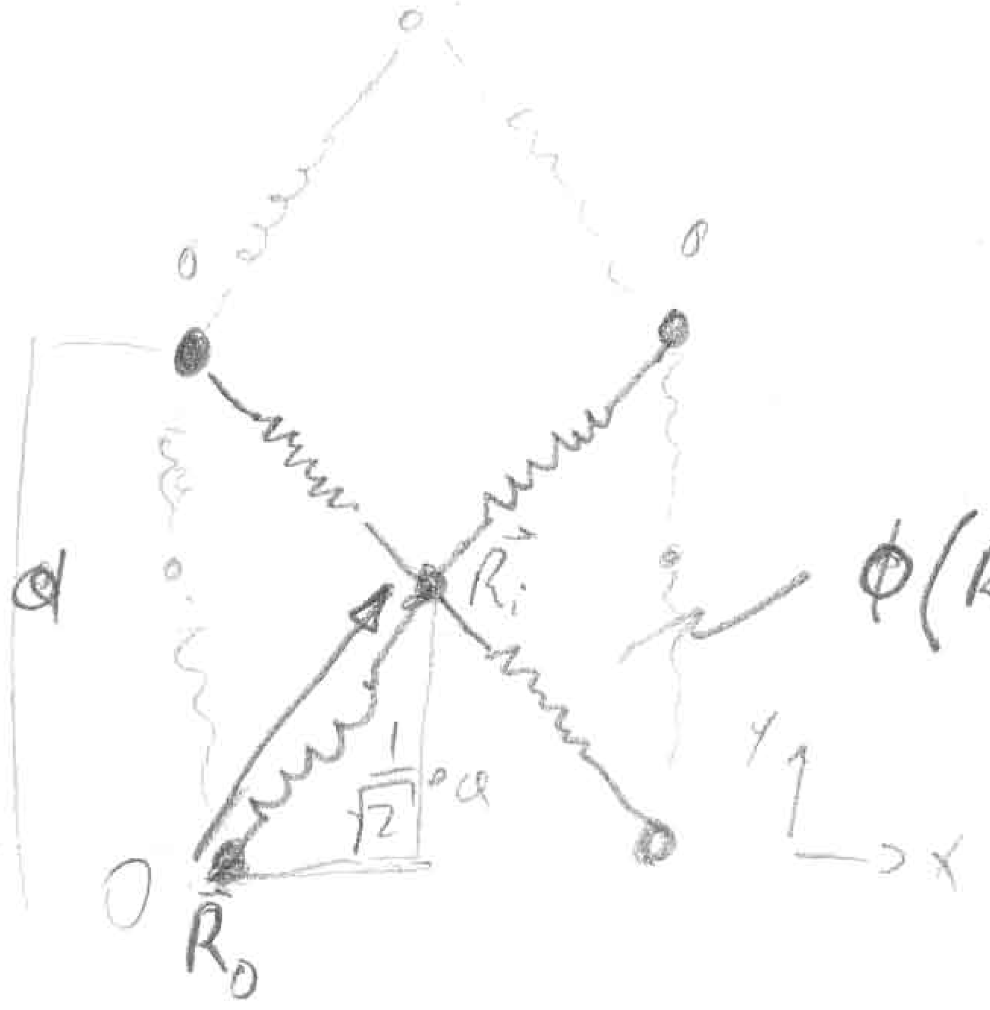
$$\lambda = \sin^2\left(\tfrac{1}{4}ak\right)\left(8A\mathbb{1} + B\tfrac{1}{2}8\right)$$

$$\omega_L = \sqrt{\frac{8A + 4B}{M}}\sin\left(\tfrac{1}{4}ka\right)$$

$$\omega_T = \sqrt{\frac{8A + 2B}{M}}\sin\left(\tfrac{1}{4}ka\right)$$

$$\omega_L = \sqrt{\frac{8A+4B}{M}}\sin\tfrac{1}{4}ka$$

15,



$$\phi(\vec{R}_0-\vec{R}_i) = \frac{c}{2}\left(|\vec{R}_0-\vec{R}_i| - |\vec{R}_0^{\,0}-\vec{R}_i^{\,0}|\right)^2$$

$$\vec{R}_i^{\,0} = \frac{a}{2}(\vec{e}_x+\vec{e}_y) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1+0\\0+1\end{pmatrix} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec{R}_0-\vec{R}_i) = \frac{c}{2}\left(\left|\vec{R}_0-\begin{pmatrix}(1+\varepsilon_{xx})\cdot x\\y\\z\end{pmatrix}\right| - \left|\vec{R}_0^{\,0}-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|\right)^2$$

$$\vec{R}_i^{\,0} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}\vec{e}_y+\vec{e}_z\\\vec{e}_z+\vec{e}_x\\\vec{e}_x+\vec{e}_y\end{pmatrix}$$

$$\vec{R}_i = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}\vec{e}_y+\vec{e}_z\\\vec{e}_z+(1+\varepsilon_{xx})\vec{e}_x\\(1+\varepsilon_{xx})\vec{e}_x+\vec{e}_y\end{pmatrix}$$

$$R_i = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}x(1+\varepsilon_{xx})\\1\end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{c}{2}\frac{a^2}{2^2}\begin{pmatrix}x\varepsilon_{xx}\\0\end{pmatrix}^2$$

$$\phi' = \frac{ca^2 2}{2\,2^2}\begin{pmatrix}x\varepsilon_{xx}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\0\end{pmatrix}$$

$$\phi'' = \frac{ca^2}{2^2}\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{ca^2}{2^2}\varepsilon_{xx}^2$$

$$\phi''_{Gesamt} = \phi''\cdot 4\cdot 4 = 4ca^2\varepsilon_{xx}^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \ldots}\left(\vec{R}_0 - \vec{R}\right)\left(\vec{R}_0, \vec{R}_1, \vec{R} \ldots\right)$$

$$\frac{C}{2}\left(\sqrt{\left(x(1+\varepsilon_{xx})\right)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{\ldots}\right)$$

[illegible]

[illegible]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}$$

$$x' = x(1+\varepsilon_{xx}) - x_1$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{11}\,\partial \varepsilon_{11}} = C_{1111} = C_{11}$$

$$\sqrt{C_{11}} = \ldots$$

$$\Gamma = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \Gamma(|q|)\, d^3q =$$

$$\frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \int \Gamma\, (q^2 \ldots)\, d\theta\, d\varphi\, dq = \frac{V}{(2\pi)\ldots}$$

...egration ... where...

$$\int \Gamma_q(\omega) \ldots \frac{V q^2}{2\pi^2}\, d\omega = \frac{2V}{(2\pi)\ldots}$$

$$\frac{V}{2\pi^2} |q|^2 \frac{d|q|}{d\omega} = \frac{g(\omega)}{2\pi^2} \left(\frac{d\omega}{d|q|}\right)^{-1} |q|^2 =$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \varepsilon_{12}^2} = \frac{\partial^2\left(\frac{c}{a6}\varepsilon_{yx}^2\right)}{\partial^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{yx}\right)^2} = \underline{\frac{c}{a}\frac{4}{3} = C_{66} = C_{44}}$$

---

19) (innere) Energie $U(S,V,N) = U$

freie Energie $F(T,V,N) = U - TS$

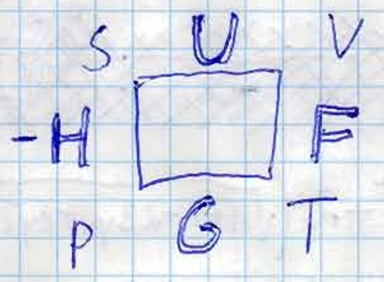
Enthalpie $H(S,p,N) = U + pV$

freie Enthalpie $G(T,p,N) = U - TS + pV$

großkanonisches Potential $J(T,V,\mu) = U - TS - \mu N$

chemisches Potential

Maxwell-Viereck



---

20) $F = U - TS$

$$F(T,V) = U(T,V) - T\int_0^T \frac{dT'}{T'}\frac{\partial}{\partial T'}E(T',V)$$

$dF = -S\,dT - p\,dV$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)\Big|_V = -S$

$$dU = T\,dS - p\,dV$$

$$\frac{dU}{\partial T} = \frac{T\,dS}{\partial T} - \underbrace{\frac{p\,dV}{\partial T}}_{=0} = \frac{T\,dS}{\partial T}$$

$$\Rightarrow F(T,V) = U(T,V) - T\int_0^T \frac{dT'}{\cancel{T'}}\frac{\cancel{T'}}{\partial T}dS = U(T,V) - T\int_0^T dS = U(T,V) - TS \quad \square$$

Experiment: ?

18) $\vec{R}_i = \vec{R}_i^0 + \varepsilon_{yx}\,\hat{e}_y(\vec{R}_i^0 \cdot \hat{e}_x)$

$$\phi = \frac{c}{2}\left(|\vec{R}_0 - \vec{R}_i| - |\vec{R}_0^0 - \vec{R}_i^0|\right)^2 =$$

$$= \frac{c}{2}\left(|\vec{R}_0 - \vec{R}_i^0 - \varepsilon_{yx}\,\hat{e}_y(\vec{R}_i^0 \cdot \hat{e}_x)| - |\vec{R}_0^0 - \vec{R}_i^0|\right)^2 = \qquad \vec{R}_0 := \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{c\,a^2}{2\cdot 4}\left(\left|-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \varepsilon_{yx}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right| - \left|-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|\right)^2 = \frac{c\,a^2}{8}\left(\sqrt{x^2+(y+\varepsilon_{xy}x)^2+z^2} - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{c\,a^2}{8}\left(\sqrt{x^2+y^2+2\varepsilon_{yx}yx+\varepsilon_{yx}^2x^2+z^2} - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 = \frac{c\,a^2}{8}\tilde{\phi}$$

Berechne nun Gesammtenergiedichte $E = \frac{\sum_i^N \phi_i}{V.N}$

für alle nächsten Nachbarn im fcc-Gitter

$$E = \frac{c\,a^2}{8}\,\frac{8}{a^3 . 12}\sum_{i=1}^{12}\tilde{\phi}_i =$$

$\pm\hat{x}\pm\hat{y}$
$\pm\hat{y}\pm\hat{z}$
$\pm\hat{x}\pm\hat{z}$

$$= \frac{c}{a.12}\Big(2\left(\sqrt{1+1+2\varepsilon_{yx}+\varepsilon_{yx}^2}-\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{1+1-2\varepsilon_{yx}+\varepsilon_{yx}^2}-\sqrt{2}\right)^2 + 0 +$$

$$+ 4\left(\sqrt{2+2+\varepsilon_{yx}^2}-\sqrt{2}\right)^2\Big) = \frac{c.4}{a.12}\left(\left(\sqrt{1+\varepsilon_{yx}+\frac{\varepsilon_{yx}^2}{2}}-1\right)^2 + \left(\sqrt{1-\varepsilon_{yx}+\frac{\varepsilon_{yx}^2}{2}}-1\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 2\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon_{yx}^2}{2}}-1\right)^2\right) \approx \frac{c}{a.3}\left(\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_{yx}-1\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\varepsilon_{yx}-1\right)^2 + 2.0\right) =$$

Entwickle für $\varepsilon_{yx} \ll 1$
$\Rightarrow \varepsilon_{yx}^2 \approx 0$ + Wurzel:
$\sqrt{1+\varepsilon_{yx}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{yx}$

$$= \frac{c}{a.3}\,2\,\frac{\varepsilon_{yx}^2}{4} = \frac{c}{a.6}\,\varepsilon_{yx}^2$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$u_i = x_i' - x_i$
$u_1 = x - x = 0$
$u_2 = y + \varepsilon_{yx}x - y = \varepsilon_{yx}x$
$u_3 = z - z = 0$

da $4 \leftrightarrow 23$ ist, würde man eigentl. ε_{23} berechnen, ist aber gemäß Angabe $=0$ (Angabefehler?), einzige nichtverschwindende Komponente ist ε_{12}, $12 \leftrightarrow 6$, somit berechne ich $\varepsilon_{12} \rightarrow C_{66}$, da jedoch kubische Symmetrie $C_{44} = C_{55} = C_{66}$, erhalte ich auch so C_{44}.

$\Longrightarrow$

21) ① zeige, dass $(L(Lf))(x) = f(x)$ ganz allgemein gilt
Legendre-Trafo

$$(Lf)(x) = z\,g(z) - f(g(z)) \qquad \text{gemäß Definition}$$

$$(L(Lf))(x) = x\,h(x) - (Lf)(h(x)) = x\,h(x) - \big(h(x)\cdot g(h(x)) - f(g(h(x)))\big) =$$

$$= x\,h(x) - h(x)\cdot x + f(x) = f(x) \qquad \text{q.e.d.}$$

② Anwenden auf Energie und Enthalpie

$$H(P) = E(V) + PV = E(V) - \frac{dE(V)}{dV}V$$ ist eine Legendre-Trafo

$$E'(V') = H(P) - PV' = H(P) - P\frac{dH(P)}{dP}$$ ist ebenfalls eine Legendre-Trafo

setze ein: $E'(V') = E(V) + PV - PV' = E(V)$ gemäß ①

$$\Rightarrow V = V' \qquad \text{q.e.d.}$$

Vorteile der Legendre-Trafo: transportiert Information auch über das Verhalten der Ableitung

nützliche Eigenschaften

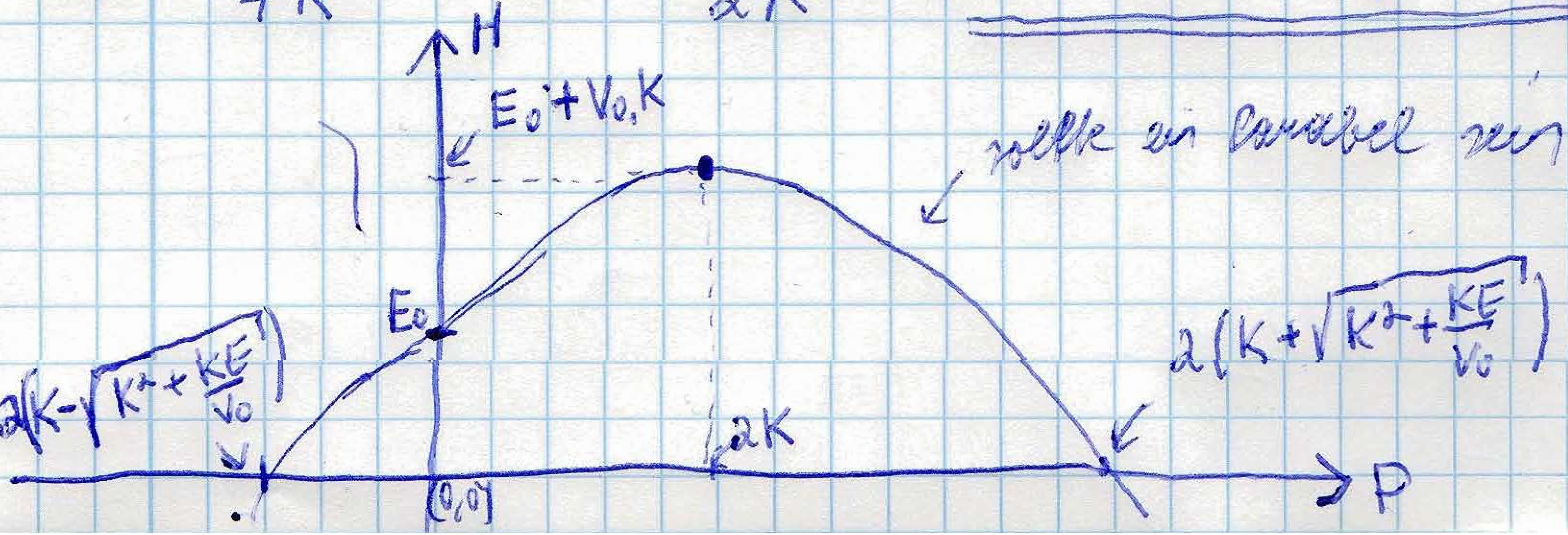
$$\frac{d(Lf)(z)}{dz} = g(z) = x(z) \qquad \frac{d^2(Lf)(z)}{dz^2} = \frac{dx}{dz} \qquad \frac{d^2(Lf)(x)}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

22) $$E(V) = E_0 + \frac{K}{V_0}(V-V_0)^2$$

$$\frac{dE}{dV} = \frac{K}{V_0}\cdot 2\cdot(V-V_0) = -P \quad\Rightarrow\quad V = V_0 - \frac{V_0 P}{2K}$$

$$H = E - \frac{dE}{dV}V = E_0 + \frac{K}{V_0}\left(V_0 - \frac{V_0P}{2K} - V_0\right)^2 + P\left(V_0 - \frac{V_0P}{2K}\right) =$$

$$= E_0 + \frac{V_0P^2}{4K} + PV_0 - \frac{V_0P^2}{2K} = \underline{\underline{E_0 + P\cdot V_0 - \frac{1}{4}V_0\frac{P^2}{K} = H}}$$



23) a) $P_j = e^{-\beta j \varepsilon}(1-e^{-\beta\varepsilon})$ $\quad \varepsilon = hcK \quad K = 214\,cm^{-1}$

$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad \gamma = \frac{h.c}{K_B.T}\Big|_{T=25°C} = \frac{1}{207\,cm^{-1}}$

$P_1 = e^{-\gamma K}(1-e^{-\gamma K})$

$P_2 = e^{-2\gamma K}(1-e^{-\gamma K})$

$P_1 + P_2 = e^{-\gamma K} - e^{-2\gamma K} + e^{-2\gamma K} - e^{-3\gamma K} = e^{-\gamma K} - e^{-3\gamma K} \approx 0{,}310663$

~ 31% sind in den ersten und zweiten angeregten Zustand

b) (i) $P_0 = P_1 . 2$

$1.\cancel{(1-e^{-\frac{hcK}{k_BT}})} = e^{-\frac{hcK}{k_BT}}\cancel{(1-e^{-\frac{hcK}{k_BT}})} . 2$

$\frac{1}{2} = e^{-\frac{hcK}{k_BT}} \Rightarrow T = \frac{-h.c.K}{k_B \ln(\frac{1}{2})} = \underline{444{,}685\,K}$

(ii) $P_0 = P_1$

$\cancel{(1-e^{-\frac{hcK}{k_BT}})} = e^{-\frac{hcK}{k_BT}}\cancel{(1-e^{-\frac{hcK}{k_BT}})}$

$1 = e^{-\frac{hcK}{k_BT}} \Rightarrow 0 = -\frac{hcK}{k_BT}$ geht nur für $\underline{T \to \infty}$

24) $U = \frac{3}{2}Nk_BT$ Energie eines idealen Gases

$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{3}{2}Nk_B \underset{\text{für ein Mol}}{\approx} \underline{12{,}466\,\frac{J}{mol.K}}$

25) $Z = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} = e^{-\beta\varepsilon_0} + \underset{\text{Entartung}}{2}.e^{-\beta\varepsilon_1} = \underline{1 + 2e^{-\beta\varepsilon}}$ mit $\beta = \frac{1}{k_BT}$

$\varepsilon_0 = 0 \;;\; \varepsilon_1 = \varepsilon$

$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(Z^N) = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(1+2e^{-\beta\varepsilon}) = -N\frac{1}{1+2e^{-\beta\varepsilon}}(-2\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}) = \underline{2N\varepsilon\frac{1}{e^{\beta\varepsilon}+2}}$

$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(2N\varepsilon\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{k_BT}}+2}\right) = 2N\varepsilon\frac{-1}{(e^{\frac{\varepsilon}{kT}}+2)^2}e^{\frac{\varepsilon}{kT}}\left(-\frac{\varepsilon}{kT^2}\right) =$

$= \underline{\frac{2N\varepsilon^2}{k}T^{-2}\frac{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}{(e^{\frac{\varepsilon}{kT}}+2)^2}}$

27) $P_n = c\, e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ $\qquad \sum_n P_n = 1 \qquad E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = \frac{1}{c} = \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}(n+\frac{1}{2})} = e^{-\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \cdot \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} n} = e^{-\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}$$

$$\Rightarrow c = \left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) e^{\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

$$P_n = e^{+\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}(\frac{1}{2}+n)} = \underline{\underline{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} n} \cdot \left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)}}$$

$$\sum_n E_n P_n = \sum_n \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})\, e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} n}\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) =$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2}\sum_n e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} n} + \sum_n n\, e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} n}\right)\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) =$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)^{-1} + \left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(-1+e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)^2}\right) =$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\frac{\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)\left(-1+e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)}\right) = \hbar\omega\left(\underbrace{\frac{1}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}-1\right)}}_{\text{Bose-Einstein-Statistik}} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\hbar\omega\left(\bar{n}(\omega)+\frac{1}{2}\right)}}$$

28 a)

$$\rho(\omega) = \delta(\omega-\omega_E)$$

$$U = 3(N-1)\int \rho(\omega)\,\hbar\omega\left(\bar{n}(\omega)+\tfrac{1}{2}\right)d\omega = 3(N-1)\int \delta(\omega-\omega_E)\left(\frac{\hbar\omega}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}-1\right)} + \frac{\hbar\omega}{2}\right)d\omega =$$

$$\underline{\underline{= 3(N-1)\left(\frac{\hbar\omega_E}{e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}}-1} + \frac{\hbar\omega_E}{2}\right)}}$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 3(N-1)\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\hbar\omega_E}{e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}}-1} + \frac{\hbar\omega_E}{2}\right) = 3(N-1)\,\hbar\omega_E\,\frac{\frac{\hbar\omega_E}{k_B T^2}\cdot e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}}-1\right)^2} =$$

$$\underline{\underline{= 3(N-1)k_B\frac{\hbar^2\omega_E^2}{k_B^2 T^2}\frac{e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}}-1\right)^2}}}$$

28b)

$$\gamma = \frac{\hbar\omega_E}{k_B T}$$

$$\lim_{T\to\infty} C_V = \lim_{\gamma\to 0} C_V = \lim_{\gamma\to 0} 3(N-1) k_B \gamma^2 \frac{e^\gamma}{(e^\gamma-1)^2} = \lim_{\gamma\to 0} 3(N-1) k_B \frac{2\gamma e^\gamma + \gamma^2 e^\gamma}{2(e^\gamma-1)} =$$

$$\lim_{\gamma\to 0} 3(N-1) k_B \frac{2\gamma e^\gamma + 2e^\gamma + 2\gamma e^\gamma + \gamma^2 e^\gamma}{2e^\gamma} = \lim_{\gamma\to 0} 3(N-1) k_B \left(1 + 2\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2\right) = \underline{\underline{(3N-1) k_B}}$$

weil für große T, die spezifische Wärme proportional zu den Freiheitsgraden ist.

&

$$C_V = 3(N-1) k_B \gamma^2 \frac{e^\gamma}{(e^\gamma-1)^2} \approx 3(N-1) k_B \gamma^2 \frac{e^\gamma}{(e^\gamma)^2} \approx 3(N-1) k_B \gamma^2 e^{-\gamma} \approx \underline{\underline{3(N-1) k_B e^{-\gamma}}}$$

für $\gamma \to$ sehr groß $\hat{=}\ T \to 0$

für sehr große γ dominiert die e-Funktion

bei Debey-Modell

$$C_V \xrightarrow{T\to\infty} 3 N k_B$$

$$C_V \xrightarrow{T\to 0} \frac{12\pi^4 N k_B}{5\,\theta_D^3} T^3$$

2c)

wenn N hinreichend groß, und Funktion $\to$ Gitter periodisch

dann kann man analog zum Übergang von Fourierreihe und Fouriertrafo eine Umwandlung der Summe in ein Integral durchführen

Die Periodizität im Ortsraum ist a = Abstand der Atome, jedoch im Raum der Wellenzahl (vgl. Impulsraum) entspricht das gemäß der Fouriertransformation eine Periodizität von $\frac{2\pi}{a}$, deshalb sind die Grenzen des Integrals $\frac{\pi}{a}$ und $-\frac{\pi}{a}$

im 2D-Fall

$$\frac{1}{N^2}\sum_{n_1=1}^{N}\sum_{n_2=1}^{N} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \int_{-\pi/a}^{\pi/a}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_1\, dk_2$$

29) $G_1(T,p) = G_2(T,p)$ in GGW : $T_1 = T_2$ $\mu_1 = \mu_2$

$p_1 = p_2 = p_c$ an Phasenübergang

$$G = U - TS + pV$$
$$F = U - TS \Rightarrow G = F + pV$$

$$G_1 = G_2 \Rightarrow F_1 + p_c V_1 = F_2 + p_c V_2$$

$$\Rightarrow F_1 - F_2 = p_c(V_2 - V_1) \Rightarrow \underline{\underline{p_c = -\frac{F_1 - F_2}{V_1 - V_2} = -\frac{\Delta F}{\Delta V}}}$$

30) laut Skript 7.3.1

$$N_{AA} = \frac{N_A^2}{N}\frac{Z}{2} \qquad N_{BB} = \frac{N_B^2}{N}\frac{Z}{2} \qquad N_{AB} = \frac{N_A N_B}{N} Z \qquad N = N_A + N_B$$

ist hier $\hat{=}$ $N_{AB} + N_{BA}$, anders als im Skript

$$N_A = \sum_i \frac{1}{2}(s_i + 1) = \frac{1}{2}\sum_i (s_i + 1) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_i s_i\right) + \left(\sum_i 1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_i s_i\right) + Z\right)$$

$$N_B = \sum_i \frac{1}{2}(-s_i + 1) = \frac{1}{2}\left(\left(-\sum_i s_i\right) + Z\right)$$

nützliche Formel: $\left(\sum_i a_i\right)^2 = 2\sum_i \sum_{i<j} a_i a_j + \sum_i a_i^2$

$$H = N_{AA}E_{AA} + N_{BB}E_{BB} + N_{AB}E_{AB} = \frac{Z}{2N}\left(N_A^2 E_{AA} + N_B^2 E_{BB} + 2N_A N_B E_{AB}\right) =$$

$$= \frac{Z}{2(N_A + N_B)}\left(\frac{1}{4}\left(\left(\sum_i s_i\right) + Z\right)^2 E_{AA} + \frac{1}{4}\left(-\left(\sum_i s_i\right) + Z\right)^2 E_{BB} + \frac{2}{4}\left(\left(\sum_i s_i\right) + Z\right)\left(-\sum_i s_i + Z\right)E_{AB}\right) =$$

$$= \frac{Z}{\left(\sum_i s_i\right) + Z - \left(\sum_i s_i\right) + Z}\frac{1}{4}\left(\left(\left(\sum_i s_i\right)^2 + 2Z\left(\sum_i s_i\right) + Z^2\right)E_{AA} + \left(\left(\sum_i s_i\right)^2 - 2Z\left(\sum_i s_i\right) + Z^2\right)E_{BB} + \right.$$

$$\left. + 2\left(-\left(\sum_i s_i\right)^2 + Z^2\right)E_{AB}\right) = \frac{1}{8}\left(\left(2\sum_i\sum_{i<j} s_i s_j + \sum_i s_i^2 + Z^2 + 2Z\left(\sum_i s_i\right)\right)E_{AA} + \right.$$

$$\left. + \left(2\sum_i\sum_{i<j} s_i s_j + \sum_i s_i^2 + Z^2 - 2Z\left(\sum_i s_i\right)\right)E_{BB} + 2\left(-2\sum_i\sum_{i<j} s_i s_j - \overbrace{\sum_i s_i^2}^{= Z^2 \text{ da } s_i \in \{-1;1\} \Rightarrow s_i^2 = 1} + Z^2\right)E_{AB}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(E_{AA} + E_{BB} - 2E_{AB}\right)\underbrace{\sum_i\sum_{i<j} s_i s_j}_{\text{in Kurzschreibweise } \sum_{i<j}} + \frac{1}{4}\left(Z^2\left(E_{AA} + E_{BB}\right) + Z\left(\sum_i s_i\right)\left(E_{AA} - E_{BB}\right)\right) =$$

$$\underline{\underline{= J\sum_{i<j} s_i s_j + \text{const}}}$$

31) $E(K) = \frac{\hbar^2}{2m} K^2$; $dE = \frac{\hbar^2 k}{m} dK$

a) durch Quantenbedingungen $\xrightarrow[\text{in 3D}]{}$ $\underline{D(\vec{K}) = 2 \frac{V}{(2\pi)^3}}$

$$D(\vec{K})\, dK^3 = D(E)\, dE = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \underbrace{4\pi K^2 dK}_{\text{Kugelkoord.}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D(E) = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}}}$$

$$D(K) = \frac{dE}{dK} D(E) = \frac{\hbar^2 K}{m} \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} = \frac{V}{(2\pi)^2} \frac{\hbar^2 K}{m} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left(\frac{\hbar^2 K^2}{2m}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D(K) = \frac{V \cdot 2}{(2\pi)^2} K^2}}$$

b) durch Quantenbedingung $\xrightarrow[\text{in 2D}]{}$ $\underline{D(\vec{K}) = 2 \frac{A}{(2\pi)^2}}$

$$D(\vec{K})\, dk^2 = D(E)\, dE = 2 \frac{A}{(2\pi)^2} \underbrace{2\pi K\, dK}_{\text{Polarkoord.}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D(E) = \frac{A}{2\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)}} = \text{const}$$

$$D(k) = \frac{dE}{dk} D(E) = \frac{A}{2\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) \cdot \left(\frac{\hbar^2 k}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D(k) = \frac{A}{\pi} K}}$$

32) a) $1\mathring{A} = 10^{-10}\,m$; $1\,eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J$; $m_{e^-} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,kg$

$\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\,Js$; $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,J/K = 8{,}617 \cdot 10^{-5}\,eV/K$

$$\underline{T_F} = \frac{\hbar^2}{2m k_B}(3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{2m k_B} n^{2/3} = \cancel{\frac{(3\pi)^{2/3}}{2}} \cancel{(n[\mathring{A}])}$$

$$= \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2} \frac{(1{,}055 \cdot 10^{-34}\,Js)^2 \cdot (10^{-10})^{-2}}{(9{,}109 \cdot 10^{-31}\,kg) \cdot (1{,}381 \cdot 10^{-23}\,J/K)} \left(n[\mathring{A}^{-3}]\right)^{2/3} =$$

$$\underline{\simeq 423054\ \frac{K}{\mathring{A}^2} \left(n[\mathring{A}^{-3}]\right)^{2/3}}$$

$$\underline{E_F} = k_B \cdot T_F = \underline{36{,}45\ \frac{eV}{\mathring{A}^2} \left(n[\mathring{A}^{-3}]\right)^{2/3}}$$

b)

	$n[\mathring{A}^{-3}]$	$T_F\,[K]$	$E_F\,[eV]$
Li	0,05	57417	4,948
Rb	0,013	23390	2,015
Al	3 · 0,071	150886	13,002

33) $$E_F = \frac{\hbar^2}{2m k_B} (3\pi)^{2/3} n^{2/3}$$

bei $T = 0K$ alle Elektronen im Grundzustand $\Rightarrow$ Fermi-Energie

im 3D-Fall: $n(E) = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3}\sqrt{E}$ laut Vorlesungs-Skript

Energie pro Volumen: $$\frac{U}{V} = \int_0^{E_F} n(E) \cdot E \cdot dE = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{E_F} E^{3/2}\, dE = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \cancel{\Big|_0^{E_F}} E^{5/2} \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{5} n E_F \quad \text{mit } n = \frac{N}{V} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\langle E \rangle}} = \frac{U}{N} = \underline{\underline{\frac{3}{5} E_F}}$$

im 2D-Fall: $n(E) = C$

Energie pro Fläche: $$\frac{U}{A} = \int_0^{E_F} n(E) \cdot E \cdot dE = C \int_0^{E_F} E \cdot dE = \frac{C}{2} E_F^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\langle E \rangle}} = \frac{U}{N} = \frac{A}{N}\frac{C}{2} E_F^2 = \underline{\underline{\tilde{C} \cdot E_F^2}}$$

in Konstante kann auch noch ein E_F „versteckt" sein; vgl 3D-Bsp

34) Damit zwei Operatoren die selben Eigenfunktionen muss der Kommutator aus beiden verschwinden.

$$[\vec{P},H] = [\vec{P},\frac{\vec{P}^2}{2m}+V(\vec{r})] = [\vec{P},\frac{\vec{P}^2}{2m}] + [\vec{P},V(\vec{r})] =$$

$$= \frac{1}{2m}\left([\vec{P},\vec{P}]\vec{P}+\vec{P}[\vec{P},\vec{P}]\right)+[\vec{P},V(\vec{r})] = [\vec{P},V(\vec{r})] = \vec{P}.V(\vec{r})-V(\vec{r}).\vec{P} = \ldots$$

$[\vec{P},\vec{P}]=0$ in Nebenrechnung angewendet auf Testfunktion $\Psi(\vec{r})$

$\vec{P}=-i\hbar\vec{\nabla}$

$$\left(\vec{P}.V(\vec{r})-V(\vec{r}).\vec{P}\right)\Psi(\vec{r}) = (-i\hbar\vec{\nabla})(V(\vec{r}).\Psi(\vec{r}))-V(\vec{r}).(-i\hbar\vec{\nabla}.\Psi(\vec{r})) =$$

$$= (-i\hbar\vec{\nabla}.V(\vec{r})).\Psi(\vec{r})+V(\vec{r}).(-i\hbar\vec{\nabla}.\Psi(\vec{r}))-V(\vec{r}).(-i\hbar\vec{\nabla}.\Psi(\vec{r})) =$$

$$= (-i\hbar\vec{\nabla}.V(\vec{r})).\Psi(\vec{r})$$

$\Rightarrow [\vec{P},H] = \vec{P}.V(\vec{r}) \neq 0$, wäre nur Null wenn $V(\vec{r})=\text{const}$, ist aber laut Angabe genau nicht der Fall.

35) Blochtheorem: $\Psi(x+R) = e^{iKR}\Psi(x)$

$e^{-i\pi}=1=e^{i\pi}$

$\Psi(x) = C_1 e^{iK_1 x} + C_{-1}e^{-iK_1 x}$; $K_1=\frac{\pi}{a}$

$$\Psi(x+R) = C_1 e^{iK_1(x+R)}+C_{-1}e^{-iK_1(x+R)} = C_1 e^{iK_1 x}.e^{iK_1 R}+C_{-1}e^{-iK_1 x}e^{-iK_1 R} =$$

$$= C_1 e^{iK_1 x}.e^{i\pi\frac{R}{a}}+C_{-1}e^{-iK_1 x}e^{-i\pi\frac{R}{a}} = C_1 e^{iKx}1^{\frac{R}{a}}+C_{-1}e^{-iK_1 x}1^{\frac{R}{a}} =$$

$$= 1^{\frac{R}{a}}\left(C_1 e^{iK_1 x}+C_{-1}e^{-iK_1 x}\right) = e^{i\pi\frac{R}{a}}\left(C_1 e^{iK_1 x}+C_{-1}e^{-iK_1 x}\right) = \underline{e^{iK_1 R}.\Psi(x)}$$

q.e.d.

$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$

$$V(x) = 2V\sin(2\pi x/a) = \frac{2V}{2i}\left(e^{i2\pi\frac{x}{a}}-e^{-i2\pi\frac{x}{a}}\right)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V(x)\Psi(x)-E\Psi(x)\right)=0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(C_1 e^{i\frac{\pi}{a}x}+C_{-1}e^{-i\frac{\pi}{a}x}\right)\right)+V(x)\left(C_1 e^{i\frac{\pi}{a}x}+C_{-1}e^{-i\frac{\pi}{a}x}\right)-E\left(C_1 e^{i\frac{\pi}{a}x}+C_{-1}e^{-i\frac{\pi}{a}x}\right)=$$

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}C_1 e^{i\frac{\pi}{a}x}+\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}C_{-1}e^{-i\frac{\pi}{a}x}+\frac{V}{i}C_1 e^{i\frac{\pi}{a}x}\left(e^{i2\pi\frac{x}{a}}-e^{-i2\pi\frac{x}{a}}\right)+$$

$$+\frac{V}{i}C_{-1}e^{-i\frac{\pi}{a}x}\left(e^{i2\pi\frac{x}{a}}-e^{-i2\pi\frac{x}{a}}\right)-E.C_1 e^{i\frac{\pi}{a}x}-E.C_{-1}e^{-i\frac{\pi}{a}x} =$$

$\Rightarrow$

bezeichne ab nun: $b=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

$$= bC_1 e^{i\frac{\pi}{a}x} + bC_{-1} e^{-i\frac{\pi}{a}x} + \frac{V}{i} C_1 \Big(-e^{-i\frac{\pi}{a}x} + \underbrace{e^{i3\frac{\pi}{a}x}}_{=0}\Big) + \frac{V}{i} C_{-1} \Big(e^{i\frac{\pi}{a}x} - \underbrace{e^{-i3\frac{\pi}{a}x}}_{=0}\Big) +$$

laut Angabe

$$- EC_1 e^{i\frac{\pi}{a}x} - EC_{-1} e^{-i\frac{\pi}{a}x} = 0$$

zerlege in 2 Gleichungen

$$\Big(bC_1 + \frac{V}{i} C_{-1} - EC_1\Big) e^{i\frac{\pi}{a}x} = 0 \quad \text{und} \quad \Big(bC_{-1} - \frac{V}{i} C_1 - EC_{-1}\Big) e^{-i\frac{\pi}{a}x} = 0$$

schreibe sie nun in Matrix und Vektor um

$$\begin{pmatrix} b-E & \frac{V}{i} \\ -\frac{V}{i} & b-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_{-1} \end{pmatrix} = 0 = \left(\begin{pmatrix} b & \frac{V}{i} \\ -\frac{V}{i} & b \end{pmatrix} - \mathbb{1} E \right) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_{-1} \end{pmatrix}$$

vergleiche mit Angabe: $\Rightarrow$ $$\underline{\underline{\bar{H} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} & \frac{V}{i} \\ -\frac{V}{i} & \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \end{pmatrix}}}$$

Teil d. Matrixgleichung entspricht Eigenwertgleichung für E $\quad (\bar{H} - \mathbb{1}E)$

$$\det(\bar{H} - \mathbb{1}E) = 0$$

$$(b-E)^2 - V^2 = 0 = b^2 - 2bE + E^2 - V^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_{1,2}}} = b \pm \sqrt{b^2 - b^2 + V^2} = b \pm V = \underline{\underline{\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \pm V}}$$

Ansatz ist bei $K_1 = \frac{\pi}{a}$ gültig, weil nur hier die Terme $e^{\pm i3K_1 x}$ wegen ihrer 2π-Periodizität im Exponenten, Termen $e^{\pm iK_1 x}$ entsprechen und daher mit einer Neudefinition der Vorfaktoren zusammengezogen werden können.

Dispersionsrelation $\omega = \omega(K)$ $\qquad E = \hbar\omega$ $\quad \Rightarrow$

$$\omega^{\pm}(K) = \frac{\hbar}{2m} K^2 \pm V$$