Übungen zu Teilchenphysik 2

SS 2008

Fierz Identität

Handout

Datum: 27. 5. 2008

von Christoph Saulder

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Fierz Identität handelt es sich um eine nach dem schweizer Physiker Markus Fierz benannte Eigenschaft von Spinoren(Dirac, aber auch allgemeinere). Mit der Fierz Identität kann man ein Produkt aus zwei Spinor Bilinieararformen in eine Linearkombination aus Produkten von Spinor Biliniearformen umschreiben. Dies ist nützlichen wenn man gewisse Teilchenreaktionen beschreiben will. Man betrachte einfach eine 'normale' Reaktion und eine dazu gekreuzte, so werden die Amplituden der Obsverablen im Ergebniss im Allgemeinen nicht gleich sein. Dennoch kann man, die einen Amplituden aus den anderen errechnen in dem man die Fierz Identität, welche die Beziehung zwischen beiden angibt, verwendet. Die Fierz Identität ist eingentlich nur für Dirac-Spinoren definiert, jedoch gibt es entsprechende Verallgemeinerung für zum Beispiel Gell-Mann Matrizen(SU(3) Algebra) und auch für allgemeine SU(N) Algebren. Diese werden dann als 'allgemeine Fierz-ähnliche Identitäten'(engl.: general Fierz-type identities) bezeichnet.

Kapitel 2

Herleitung der Matrixelemente

2.1 Ansatz

Wir setzen an, dass man ein Produkt aus Spinoren wie folgt anschreiben können:

$$(\bar{a}\Lambda_i b)(\bar{c}\Lambda^i d) = \sum_k F_{ik}(\bar{a}\Lambda_i d)(\bar{c}\Lambda^i b)$$

Dies funktioniert, weil die Λ's(Definition folgt noch) ein vollständiges orthogonales System bilden. Wenn wir nun nur die Λ's betrachten, können wir die Gleichung ein wenig umschreiben und danach auf beiden Seiten mittig ein Γ hineinmultiplizieren, welches die selben Eigenschaften wie Λ hat. Nun müssen wir das somit erhaltene Gleichungssysteme, welche je aus 5 (Matrix)Gleichungen bestehen, lösen. Es hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
&(\Lambda)_{\alpha\beta}(\Gamma)_{\beta\gamma}(\Lambda)_{\gamma\delta} = \\
&a_{s\Lambda}(1)_{\alpha\delta}(\Gamma)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\beta}+ \\
&a_{p\Lambda}(\gamma^5)_{\alpha\delta}(\Gamma)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\beta}+ \\
&a_{v\Lambda}(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(\Gamma)_{\beta\gamma}(\gamma^\mu)_{\gamma\beta}+ \\
&a_{a\Lambda}(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}(\Gamma)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\beta}+ \\
&a_{t\Lambda}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(\Gamma)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\beta}
\end{aligned}$$

Die Λ's und Γ's können nun für einen Skalar(1), Pseudoskalar(γ^5), Vektor(γ^τ), Axialvektor($\gamma^\tau\gamma^5$) oder Tensor($\sigma^{\lambda\tau}$) stehen. Dieses Gleichungssystem ist nun nach allen $a_{...\Lambda)}$ zu lösen. Am Ende erhalten wir 25 solche Koeffizenten, welche wir dann als 5x5 Matrix anschreiben werden.
Für die spätere Rechnung ist es nützlich alle Matrizen einmal explizit anzuschreiben:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \gamma^0\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^1\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^2\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^3\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Weiters werden folgende Relationen und Definitionen verwendet:

$\sigma^{\lambda\tau} = \frac{i}{2}(\gamma^\lambda\gamma^\tau - \gamma^\tau\gamma^\lambda)$
$\gamma^\lambda\gamma^\tau + \gamma^\tau\gamma^\lambda = 2g^{\lambda\tau}$
$\gamma^\tau\gamma_\tau = 4$
$\gamma_5\gamma^5 = 1$
$\gamma^5\gamma^\tau\gamma_5 = -\gamma^\tau$

2.2 rechte Seite

Die rechte Seite der Gleichung sieht für alle Möglichkeiten von $(\Gamma)_{\alpha\beta}$ gleich aus:

Im Fall $(1)_{\beta\gamma}$:

$a_s(1)_{\alpha\delta}(1)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\beta}+a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}(1)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\beta}+a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(1)_{\beta\gamma}(\gamma^\mu)_{\gamma\beta}+a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}(1)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\beta}+$
$a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(1)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\beta} =$
$a_s(1)_{\alpha\delta}Sp(1)+a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}Sp(\gamma_5)+a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}Sp(\gamma^\mu)+a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}Sp(\gamma_\mu\gamma_5)+a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}Sp(\sigma_{\mu\nu}) =$

$$4a_s(1)_{\alpha\delta}$$

weil alle anderen Spuren nämlich Null ergeben

Im Fall $(\gamma^5)_{\beta\gamma}$:

$a_s(1)_{\alpha\delta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\beta}+a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\beta}+a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma^\mu)_{\gamma\beta}+a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\beta}+$
$a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\beta} =$
$a_s(1)_{\alpha\delta}Sp(\gamma^5) + a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}4 + a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}0 + a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}0 + a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}0 =$

$$4a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}$$

dass die letzten Terme Null sind kann man sehr leicht durch explizites anschreiben von γ^5, γ^μ, $\gamma^5\gamma^\mu$ und $\sigma^{\mu\nu}$ als Matrix sehen.

Im Fall $(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}$:

$a_s(1)_{\alpha\delta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\beta}+a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\beta}+a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\gamma^\mu)_{\gamma\beta}+a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\beta}+$
$a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\beta} =$
$a_s(1)_{\alpha\delta}Sp(\gamma^\tau) + a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}0 + a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}g^\tau_\mu 4 + a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}0 + a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}0 =$

$$4a_v(\gamma^\tau)_{\alpha\delta}$$

für das verschwinden der letzten Terme kann man wieder das gleiche Argument wie schon zuvor verwenden.

Im Fall $(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}$:

$a_s(1)_{\alpha\delta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\beta}+a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\beta}+a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma^\mu)_{\gamma\beta}+a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\beta}+$
$a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\beta} =$
$a_s(1)_{\alpha\delta}Sp(\gamma^\tau\gamma^5) + a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}0 + a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}0 + a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}g^\tau_\mu(-4) + a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}0 =$

$$-4a_a(\gamma^\tau\gamma^5)_{\alpha\delta}$$

analoges Vorgehen wie zuvor

Im Fall $(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}$:

$a_s(1)_{\alpha\delta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\beta}+a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\beta}+a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(\gamma^\mu)_{\gamma\beta}+a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\beta}+$
$a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\beta} =$
$a_s(1)_{\alpha\delta}Sp(\sigma^{\lambda\tau})+a_p(\gamma^5)_{\alpha\delta}0+a_v(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}0+a_a(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\delta}0+a_t(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(-\frac{1}{4})(\gamma_\lambda\gamma_\tau-$
$\gamma_\tau\gamma_\lambda)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)_{\gamma\beta} =$
$a_a(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(-\frac{1}{4})(-32)\delta_{\lambda\mu}\delta_{\tau\nu} =$

$$8a_a(\sigma^{\lambda\tau})_{\alpha\delta}$$

Wie wir nun sehen stehen auf der rechten Seiten der Gleichung immer nur Terme, welche nur aus dem jeweiligen $\Gamma_{\alpha\beta}$ und Konstanten bestehen. Somit wird das Lösung des Gleichungssystem nach den Koffezienten $a_{\dots}$ sehr erleichtert. Wir müssen nun nur noch die linke Seiten der Gleichungen berechnen und vergleichen.

2.3 Skalar

Nun wählen wir für Λ einen Skalar und rechnen uns die Koeffezienten für alle Möglichkeiten von Γ aus.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (1)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(1)_{\alpha\beta}(1)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\delta} =$
$(1)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_s = \frac{1}{4}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(1)_{\alpha\beta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_p = \frac{1}{4}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(1)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\tau)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_v = \frac{1}{4}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(1)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\tau\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_a = -\frac{1}{4}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(1)_{\alpha\beta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(1)_{\gamma\delta} =$
$(\sigma^{\lambda\tau})_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_t = \frac{1}{8}$.

2.4 Pseudoskalar

Als nächstes wählen wir für Λ einen Pseudoskalar und rechnen uns die Koeffezienten für alle Möglichkeiten von Γ aus.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (1)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^5)_{\alpha\beta}(1)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\beta\delta} =$
$(1)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_s = \frac{1}{4}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^5)_{\alpha\beta}(1)_{\beta\delta} =$

$(\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_p = \frac{1}{4}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$-(\gamma^\tau)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_v = -\frac{1}{4}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$-(\gamma^\tau\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_a = \frac{1}{4}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^5)_{\alpha\beta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$\frac{i}{2}(\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^\lambda\gamma^\tau - \gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$\frac{i}{2}(\gamma^5\gamma^\lambda\gamma_5\gamma^5\gamma^\tau\gamma_5 - \gamma^5\gamma^\tau\gamma_5\gamma^5\gamma^\lambda\gamma_5)_{\alpha\delta} =$
$\frac{i}{2}(\gamma^\lambda\gamma^\tau - \gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\delta} =$
$(\sigma^{\lambda\tau})_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_t = \frac{1}{8}$.

2.5 Vektor

Nun wählen wir für Λ einen Vektor und rechnen uns die Koeffezienten für alle Möglichkeiten von Γ aus.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (1)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(1)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu)_{\beta\delta} =$
$4(1)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_s = 1$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu)_{\gamma\epsilon}(\gamma_5)_{\epsilon\zeta}(\gamma^5)_{\zeta\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(-\gamma_\mu)_{\beta\zeta}(\gamma^5)_{\zeta\delta} =$
$-4(\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_p = -1$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(-(\gamma_\mu)_{\beta\gamma}(\gamma^\tau)_{\gamma\delta} + 2g^\tau_\mu) =$
$-4(\gamma^\tau)_{\alpha\delta} + 2(\gamma^\tau)_{\alpha\delta} =$
$-2(\gamma^\tau)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_v = -\frac{1}{2}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu)_{\gamma\epsilon}(\gamma_5)_{\epsilon\zeta}(\gamma^5)_{\zeta\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(-\gamma^\tau\gamma_\mu)_{\beta\zeta}(\gamma^5)_{\zeta\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu\gamma^\tau - 2g^\tau_\mu)_{\beta\zeta}(\gamma^5)_{\zeta\delta} =$
$4(\gamma^\tau)_{\alpha\delta} - 2(\gamma^\tau)_{\alpha\delta} =$
$2(\gamma^\tau\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_a = -\frac{1}{2}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} =$
0

Die Rechnung ergibt Null wegen der Symmetrie des Ausdrucks der beiden γ^μ's und der Antisymmetrie des Tensors $\sigma^{\lambda\tau}$. Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_t = 0$.

2.6 Axialvektor

Nun wählen wir für Λ einen Axilvektor und rechnen uns die Koeffezienten für alle Möglichkeiten von Γ aus.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (1)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}(1)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\beta\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(-\gamma_\mu)_{\beta\delta} =$
$-4(1)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_s = -1$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$4(\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_p = 1$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(-\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(-\gamma_\mu)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(-\gamma_\mu\gamma^\tau + 2g^\tau_\mu)_{\beta\delta} =$
$(-4\gamma^\tau + 2\gamma^\tau)_{\alpha\delta} =$
$-2(\gamma^\tau)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_v = -\frac{1}{2}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(-\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
$(\gamma^\tau\gamma^\mu - 2g^{\tau\mu})_{\alpha\gamma}(\gamma_\mu\gamma^5)_{\gamma\delta} =$
$(4\gamma^\tau\gamma^5 - 2\gamma^\tau\gamma^5)_{\alpha\delta} =$
$2(\gamma^\tau\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_a = -\frac{1}{2}$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\gamma\delta} =$
0

Die Rechnung ergibt Null wegen der Symmetrie des Ausdrucks der beiden $\gamma^\mu\gamma^5$'s und der Antisymmetrie des Tensors $\sigma^{\lambda\tau}$. Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_t = 0$.

2.7 Tensor

Nun wählen wir für Λ einen Tensor und rechnen uns die Koeffezienten für alle Möglichkeiten von Γ aus.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (1)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(1)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(1)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\gamma\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\beta\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu)_{\alpha\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu - 4\gamma^\nu\gamma_\nu - 4\gamma^\mu\gamma_\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu)_{\alpha\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu(-\gamma_\nu\gamma_\mu + 2g_{\nu\mu}) - 16 - 16 + \gamma^\nu\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma_\nu + 2g_{\mu\nu}))_{\alpha\delta} =$
$-\frac{1}{4}(-16 + 2\gamma^\mu\gamma_\mu - 16 - 16 + 16 + 2\gamma^\mu\gamma_\mu)_{\alpha\delta} =$
$-\frac{1}{4}(-16 + 8 - 16 - 16 + 16 + 8)_{\alpha\delta} =$
$12(1)_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_s = 3$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\gamma^5)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma^5\gamma_\nu\gamma_\mu)_{\beta\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^5\gamma_\mu\gamma_5\gamma^5\gamma_\nu\gamma_5\gamma^5 - \gamma^5\gamma_\nu\gamma_5\gamma^5\gamma_\mu\gamma_5\gamma^5)_{\beta\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}((-\gamma_\mu)(-\gamma_\nu)\gamma^5 - (-\gamma_\nu)(-\gamma_\mu)\gamma^5)_{\beta\delta} =$
$-\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}((\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma^5)_{\beta\delta} =$
$12(\gamma^5)_{\alpha\delta}$

Der Großteil der Rechnung verläuft dann total analog zum skalaren Fall. Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_p = 3$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\gamma\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\nu\gamma_\mu)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu(-\gamma_\mu\gamma^\tau + 2g^\tau_\mu)\gamma_\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\tau + 2g^\tau_\mu)\gamma_\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu(-\gamma_\nu\gamma^\tau + 2g^\tau_\nu)\gamma_\mu + \\
&\gamma^\nu\gamma^\mu(-\gamma_\nu\gamma^\tau + 2g^\tau_\nu)\gamma_\mu)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma^\tau\gamma_\nu + 2\gamma^\mu\gamma^\nu g^\tau_\mu\gamma_\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu\gamma^\tau\gamma_\nu - 2\gamma^\nu\gamma^\mu g^\tau_\mu\gamma_\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\nu\gamma^\tau\gamma_\mu + \\
&2\gamma^\mu\gamma^\nu g^\tau_\nu\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma^\tau\gamma_\mu + 2\gamma^\nu\gamma^\mu g^\tau_\nu\gamma_\mu)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma^\tau\gamma_\nu + 8\gamma^\tau + 4\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu - 2\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu + 4\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\mu + 2\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma^\tau\gamma_\mu + \\
&8\gamma^\tau)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(-2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma^\tau\gamma_\nu + 4\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu + 16\gamma^\tau)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(-2\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\nu + 2g^\nu_\mu)\gamma^\tau\gamma_\nu + 4\gamma^\nu(-\gamma_\nu\gamma^\tau + 2g^\tau_\nu) + 16\gamma^\tau)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(8\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu - 4\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu - 16\gamma^\tau + 8\gamma^\tau + 16\gamma^\tau)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(4\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu + 8\gamma^\tau)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(4\gamma^\nu(-\gamma_\nu\gamma^\tau + 2g^\tau_\nu) + 8\gamma^\tau)_{\alpha\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(-16\gamma^\tau + 8\gamma^\tau + 8\gamma^\tau)_{\alpha\delta} = \\
&0
\end{aligned}
$$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_v = 0$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\gamma\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau\gamma^5\gamma_\mu\gamma_5\gamma^5\gamma_\nu\gamma_5\gamma^5 - \gamma^\tau\gamma^5\gamma_\nu\gamma_5\gamma^5\gamma_\mu\gamma_5\gamma^5)_{\beta\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\tau(-\gamma_\mu)(-\gamma_\nu)\gamma^5 - \gamma^\tau(-\gamma_\nu)(-\gamma_\mu)\gamma^5)_{\beta\delta} = \\
&-\tfrac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}((\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma^\tau\gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma^5)_{\beta\delta} = \\
&0
\end{aligned}
$$

Der Großteil der Rechnung verläuft dann total analog zum vektoriellen Fall. Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_a = 0$.

Für den Fall $\Gamma_{\beta\gamma} = (\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}$ folgt für die linke Seite:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\sigma^{\lambda\tau})_{\beta\gamma}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\delta} = \\
&-\tfrac{i}{8}((\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\lambda\gamma^\tau - \gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\beta\gamma}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\gamma\delta}) = \\
&-\tfrac{i}{8}((\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\tau - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\tau - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma^\lambda + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\gamma}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\gamma\delta}) =
\end{aligned}
$$

$-\frac{i}{8}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma_\nu\gamma_\mu+$
$\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma_\nu\gamma_\mu+\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma_\mu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma_\mu)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda(-\gamma_\mu\gamma^\tau+2g^\tau_\mu)\gamma_\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda(-\gamma_\mu\gamma^\tau+2g^\tau_\mu)\gamma_\nu-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau(-\gamma_\mu\gamma^\lambda+$
$2g^\lambda_\mu)\gamma_\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau(-\gamma_\mu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\mu)\gamma_\nu)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma^\tau\gamma_\nu+2\gamma^\tau\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma^\tau\gamma_\nu-2\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma^\lambda\gamma_\nu+\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma_\nu-$
$2\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma_\nu+2\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma_\nu)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu(-\gamma_\nu\gamma^\tau+2g^\tau_\nu)+2\gamma^\tau(-\gamma^\lambda\gamma^\nu+2g^{\nu\lambda})\gamma_\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu(-\gamma_\nu\gamma^\tau+$
$2g^\tau_\nu)-2\gamma^\nu\gamma^\tau(-\gamma_\nu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\nu)+\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\mu(-\gamma_\nu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\nu)-2\gamma^\lambda(-\gamma^\tau\gamma^\nu+2g^{\nu\tau})\gamma_\nu-$
$\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\mu(-\gamma_\nu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\nu)+2\gamma^\nu\gamma^\lambda(-\gamma_\nu\gamma^\tau+2g^\tau_\nu))_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\tau-2\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\lambda\gamma_\mu-8\gamma^\tau\gamma^\lambda+4\gamma^\tau\gamma^\lambda-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\tau+2\gamma^\tau\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu+$
$2\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu\gamma^\lambda-4\gamma^\lambda\gamma^\tau-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\lambda+2\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma_\mu+8\gamma^\lambda\gamma^\tau-4\gamma^\lambda\gamma^\tau+\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\lambda-$
$2\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\mu-2\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma^\tau+4\gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu(-\gamma_\mu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\mu)\gamma_\nu\gamma^\tau-2(-\gamma^\tau\gamma^\mu+2g^{\tau\mu})\gamma^\lambda\gamma_\mu-\gamma^\nu\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\lambda+g^\lambda_\mu)\gamma_\nu\gamma^\tau+$
$2\gamma^\tau(-\gamma^\lambda\gamma^\mu+2g^{\lambda\mu})\gamma_\mu+2\gamma^\nu(-\gamma_\nu\gamma^\tau+2g^\tau_\nu)\gamma^\lambda-\gamma^\mu\gamma^\nu(-\gamma_\mu\gamma^\tau+2g^\tau_\mu)\gamma_\nu\gamma^\lambda+$
$2\gamma^\mu\gamma^\lambda(-\gamma_\mu\gamma^\tau+2g^\tau_\mu)+\gamma^\nu\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\tau+2g^\tau_\mu)\gamma_\nu\gamma^\lambda-2\gamma^\lambda(-\gamma^\tau\gamma^\mu+2g^{\tau\mu})\gamma_\mu-$
$2\gamma^\nu(-\gamma_\nu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\nu)\gamma^\tau)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma^\tau+8\gamma^\lambda\gamma^\tau+2\gamma^\tau\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu-4\gamma^\lambda\gamma^\tau+4\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma^\tau-2\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma^\tau-$
$8\gamma^\tau\gamma^\lambda+4\gamma^\tau\gamma^\lambda-8\gamma^\tau\gamma^\lambda+4\gamma^\tau\gamma^\lambda+\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma^\tau\gamma_\nu\gamma^\lambda-8\gamma^\tau\gamma^\lambda-2\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma^\tau+4\gamma^\tau\gamma^\lambda-$
$4\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu\gamma^\lambda+2\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu\gamma^\lambda+8\gamma^\lambda\gamma^\tau-4\gamma^\lambda\gamma^\tau+8\gamma^\lambda\gamma^\tau-4\gamma^\lambda\gamma^\tau)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu(-\gamma_\nu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\nu)\gamma^\tau+2\gamma^\tau(-\gamma^\lambda\gamma^\mu+2g^{\lambda\mu})\gamma_\mu+2\gamma^\nu(-\gamma_\nu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\nu)\gamma^\tau+$
$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu(-\gamma_\nu\gamma^\tau+2g^\tau_\nu)\gamma^\lambda-2\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\mu)\gamma^\tau-2\gamma^\nu(-\gamma_\nu\gamma^\tau+2g^\tau_\nu)\gamma^\lambda+12\gamma^\lambda\gamma^\tau-$
$12\gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\lambda\gamma^\tau-2\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma^\tau-8\gamma^\tau\gamma^\lambda+4\gamma^\tau\gamma^\lambda-8\gamma^\lambda\gamma^\tau+4\gamma^\lambda\gamma^\tau-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\tau\gamma^\lambda+$
$2\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma_\mu\gamma^\lambda+8\gamma^\lambda\gamma^\tau-4\gamma^\lambda\gamma^\tau+8\gamma^\tau\gamma^\lambda-4\gamma^\tau\gamma^\lambda+12\gamma^\lambda\gamma^\tau-12\gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\nu+2g^\nu_\mu)\gamma_\nu\gamma^\lambda\gamma^\tau-2\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\lambda+2g^\lambda_\mu)\gamma^\tau-\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\nu+2g^\nu_\mu)\gamma_\nu\gamma^\tau\gamma^\lambda+$
$2\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma^\tau+2g^\tau_\mu)\gamma^\lambda+12\gamma^\lambda\gamma^\tau-12\gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(-16\gamma^\lambda\gamma^\tau+8\gamma^\lambda\gamma^\tau+8\gamma^\lambda\gamma^\tau-4\gamma^\lambda\gamma^\tau+16\gamma^\tau\gamma^\lambda-8\gamma^\tau\gamma^\lambda-8\gamma^\tau\gamma^\lambda+4\gamma^\tau\gamma^\lambda+$
$12\gamma^\lambda\gamma^\tau-12\gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\delta}=$
$-\frac{i}{4}(8\gamma^\lambda\gamma^\tau-8\gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\delta}=$
$-2i(\gamma^\lambda\gamma^\tau-\gamma^\tau\gamma^\lambda)_{\alpha\delta}=$
$-4(\sigma^{\lambda\tau})_{\alpha\delta}$

Durch Vergleich mit der rechte Seite erhalten wir $a_t=-\frac{1}{2}$.

2.8 Ergebniss

Wenn mann nun die einzelnen Koeffizienten geschickt anordnet ergibt sich folgendes Schema:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & S & V & T & A & P \\
S & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
V & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\
T & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\
A & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\
P & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Es ist für das selbe Λ von links nach rechts zu lesen. Diese Matrix ist die gesuchte Matrix der Koeffizienten der Fierz Identität. Durch die gut gewählte Anordnung ist sie symmetrisch bezüglich des zentralen Elements.

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\
3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\
-1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{pmatrix}
$$

Kapitel 3

Physikalische Bedeutung

3.1 Allgemein

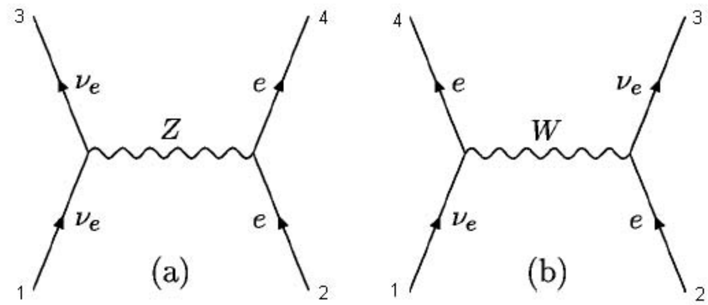
In der Teilchenphysik werden Fierz Identitäten immer wieder gebraucht. Man verwendet sie zum Umschreiben von Reaktionen auf andere bis auf Amplituden gleichwertige, welche aber leichter zu berechnen sind. Man nehme vier Bispionoren $\bar{a}$, b, $\bar{c}$ und d und schreibe Produkte von daraus konstruierten Lorentzskalaren an:

$$(\bar{a}\Gamma_i b)(\bar{c}\Gamma^i d) = \sum_k F_{ik}(\bar{a}\Gamma_i d)(\bar{c}\Gamma^i b)$$

Die Γ_i entsprechen dann unseren üblichen Skalar, Pseudoskalar, Vektor, Axialvektor und Tensor. Mit Hilfen der Koeffizenten der Fierz-Matrix kann man nun die Amplituden verschiedener vergleichbarer Reaktionen ineinander umrechnen.

3.2 Beispiel: Neutrino-Elektron Streuung

Am Beispiel der Neutrino-Elektron Streuung lässt sich die Wirkung der Fierz-Transformation veranschaulichen. Sie führt die beiden tree-level Feynman-Graphen (a) und (b) ineinander über:


3
ν_e
4
e
Z
ν_e
e
1
(a)
2
4
e
3
ν_e
W
ν_e
e
1
(b)
2

Literaturverzeichnis

D. Bailin; 'Weak Interactions'; Sussex U.P. (1977)

L. B. Okun; 'Leptons and Quarks'; Elsevier Science Pub Co (1987)

C. C. Nishia; 'Simple derivation of general Fierz-type identities'; Am. J. Phys. 73(12) (2005)

J. F. Nieves & P. B. Pal; 'Generalized Fierz identities'; Am. J. Phys. 72(8) (2004)

U. Langenfeld; 'Eine untere Massenschränke für Neutralinos aus Supernova-Kühlung'; Universität Bonn (2004)